Zelluläre Automaten

W. Eisenberg, U. Renner
Arnold-Sommerfeld-Gesellschaft e.V.
Leipzig
Germany

Gliederung:

1. Warum ZA?
2. Was ist der ZA?
3. Konkretes Beispiel – Kombinatorik – Mathematik
4. Anderer Weg – kinetische Gleichung – Physik
5. ZA-Konzept
6. Unterstützung des ZA-Konzepts

Im Eröffnungsvortrag mit dem Exkurs zum „Harmonischer Analysator“ haben wir die Vor- und Nachteile von mechanischen und elektrischen technischen Ausführungen einer Maschinenidee kurz gestreift. Aus solchen vergleichenden Analysen heraus sind oft Weiterentwicklungen in der Technik, so auch hier, z. T. verständlich zu machen. Sie müssen aber wegen der bekannten ökonomischen Abhängigkeiten der Technikentwicklung nicht die vollständigen Erklärungen enthalten. Trotzdem beginnen wir in diesem Kontext mit folgender technisch dominanten Frage:

Warum wurde die Idee der zellulären Automaten nicht ad acta gelegt?

Bekannt: serielle und parallele Rechenmaschinen mit Vor- und Nachteilen

Daher: Parallelrechner als zelluläre Automaten mit dem Ziel: Verringerung des Hardware- und Softwareaufwandes und Erhöhung der Rechengeschwindigkeit.
ZA ist als Hardwarerealisierung aufgrund ihrer massiv parallelen Arbeitsweise eine Alternative zu den bestehenden Architekturen (sequentiell, parallel 1, z. B. Cray). Als bekanntes Beispiel: Cray
Historisch bedeutsame Modelle: Gittergasmodelle:

Welche Vor- und Nachteile haben die Parallel- und Serienmaschine?[2]

Bekannt: Rechenmaschinen arbeiten mit Impulsgenerator und bestimmter Frequenz (GHz-B.)
Bekannt: Zahldarstellung (in Rechnungen) und Rechenanordnungen als Impulsfolgen;.

Parallelrechner: die die einzelnen Ziffern einer Zahl darstellenden Impulse werden auf einer entsprechenden Anzahl von Leitungen weitergegeben und dann im Rechenwerk gleichzeitig verarbeitet;

Beispiel: der nach dem Baukastenprinzip konstruierte ENIAC (Electronic Numerial Integrator and Computer), der von Prof. H. M. Franke erwähnt wurde. Er arbeitete z. B. mit elf

Leitungen (10 Ziffern, Vorzeichen) und weiteren Kabeln für die Befehle zur Rechenfolge. Heute ist das Leitungsproblem gelöst.

Seriell arbeitende Maschinen: die den einzelnen Ziffern entsprechenden Impulse werden in zeitlicher Folge auf einer Leitung weitergegeben;

Die Parallelmaschinen erfordern einen wesentlich größeren Materialaufwand, arbeiten dafür aber schneller. Die Serienmaschinen brauchen weniger Material arbeiten langsamer und der Steuerungsmechanismus wird komplizierter. Viele neueren Maschinen sind seriell arbeitende Maschinen. Muß das so bleiben? Die Antwort ist: Nein! Deshalb die Vorstellung unseres ZA-Projektes!! Arbeiten in den USA stabilisieren diese Antwort. Man muß aber auch sagen, dass meist Hybridstrukturen mit einer dominanten Struktur (seriell, parallel) anzutreffen sind:

Welche Phänomene forcierten die Entwicklung der zellulären Automaten?

Der zelluläre Automat wurde als Modell zum Studium der Wachstumsphänomene in der Physik und Evolution in organischen Systemen konzipiert. Die ZA haben nicht von ungefähr viel strukturelle Ähnlichkeit mit biologischen Organismen oder Organen, die selbst aus einer Vielzahl von Zellen aufgebaut sind. Auch scheint in der Natur die parallele Arbeitseinteilung in den Zellen ein wesentliches Prinzip zu sein.

Die Algorithmenentwicklung war z. B. vom LIFE-Spiel stark geprägt. Als einfaches Beispiel zur Demonstration von Magnetisierungseffekten sei der ISING-Automat genannt. Den zwei Elektronenspinzuständen entsprechen genau zwei Zustände in der Automatenzelle.

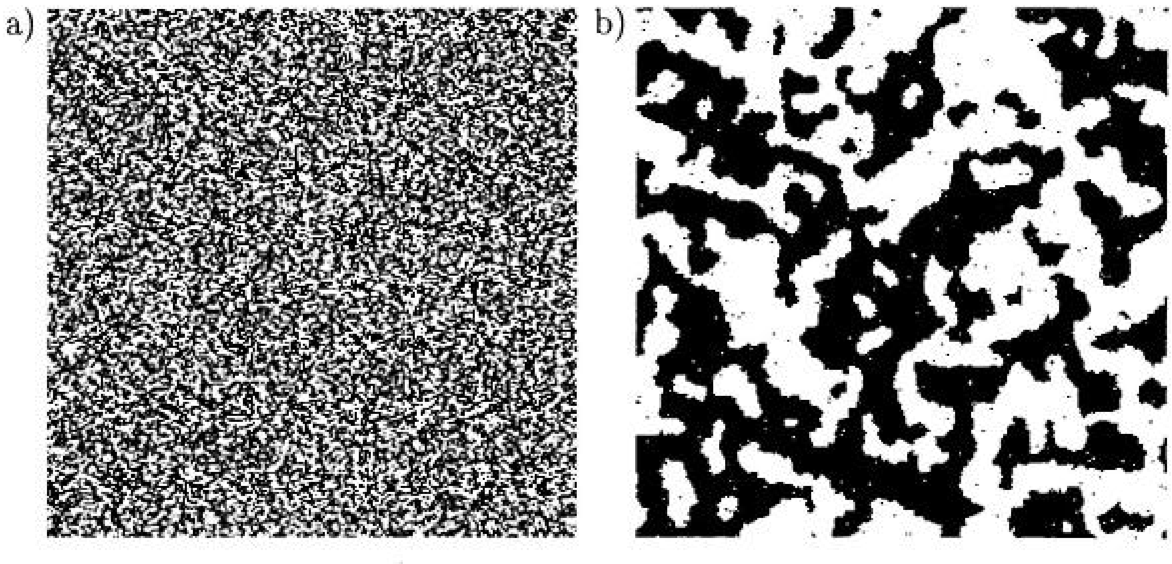


Abb. 1: Ising-Automat

Der Parallelausrichtung des Spins wirkt die thermische Unordnung, das zufällige Umklappen der Spins entgegen. Die Ordnung dominiert unterhalb einer bestimmten Temperatur.

Was ist der zelluläre Automat?

Der zelluläre Automat ist ein diskretes dynamisches System mit endlich vielen dynamischen Variablen. Genauer ist der zelluläre Automat symbolisch charakterisiert als A = (G, Z, N, F).

Das 4er-Tupel umfasst Gittergeometrie G der Einzelautomaten, die endliche Menge Z diskreter Zustände, die lokale und uniforme Nachbarschaft N und für jede Zelle geltende Überführungsfunktion F, die den Zustand einer Zelle in Abhängigkeit von den Zuständen der Nachbarzellen in diskreten Zeitschritten wieder in einen Zustand der Zustandsmenge Z transformiert.

Die in diskreten Zeitabschnitten ablaufende Dynamik wird durch dynamische Regeln beschrieben. Dabei ist der neue Wert einer Zeitvariablen eine Funktion des alten Wertes dieser Variablen und der Werte von Variablen benachbarter Zellen (lokale Wechselwirkung).

Die globale Entwicklung des Gesamtzustandes vom ZA hängt empfindlich von der Anfangskonfiguration der Zellzustände ab. Diese ZA-Regeln werden entweder streng aus bekannten Gesetzen abgeleitet oder als Erfahrungsregeln formuliert. Es gibt ZA mit deterministischen oder stochastischen Regeln (bedingte Wahrscheinlichkeit) oder Fuzzy-Regeln (Ausblick).

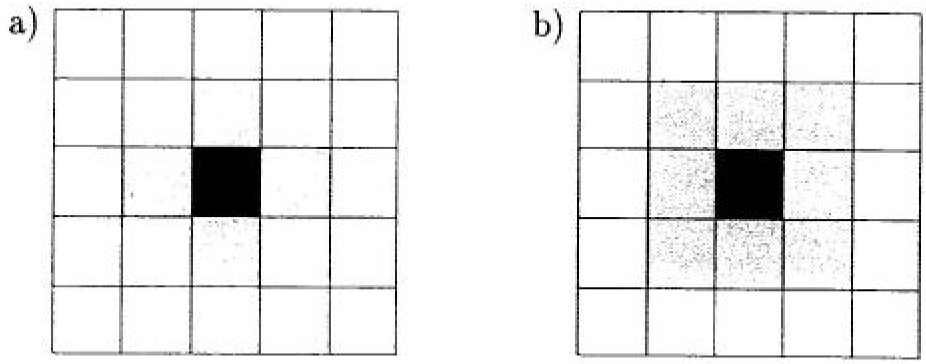


Abb. 2: Einfache Geometrie und Nachbarschaften (von Neumann, Moore)

Heterogene Zustandsüberführungen können durch Zustandszahlerweiterungen realisiert werden. Weiteres können Sie über Automatennetzwerke im Teubner-Taschenbuch der Statistischen Physik von G. Vojta/M. Vojta [3] nachlesen. Der Quanten-ZA wird hier nicht betrachtet.

Welche Regeln werden benutzt und zugelassen?

Regeln = Abbildungsregeln (nicht vordergründig als numerische Regeln verstanden)= lokale Regeln, die als einfache Zeitoperatoren wirken.

Die Zustandsüberführung = räumlich parallel und zeitlich synchron für alle Zellen im einheitlichen Takt, der Systemzeit.

Beginn: Geeignet gewählte Anfangskonfiguration, durch Nahwirkung kann Zustandänderung entfernter Zellen durch Information der betrachteten Zelle nur zeitverzögert (endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit) stattfinden. Diese Struktur entscheidet auch über das Spektrum praktisch erfolgreicher Anwendungen:

Wie reduziert man Anzahl der Regeln?

Die theoretische Anzahl an Überführungen kann wegen der möglichen kombinatorischen Vielfalt der Regeln gigantisch anwachsen (N^{N^k} mit N=Anzahl der Zustände, k=Anzahl der Nachbarn)!

Das nötige praktische Austesten der Regeln wäre ein hoffnungsloses Unterfangen. Zudem wäre die Stimulationszeit zu groß.

Wie geht man vor? Man nutzt die Reduktionsmethode!
Durch die Reduktion der großen Anzahl von Regeln mit anwendungsbezogenen Systemsymmetrien (z. B. Rotationssymmetrie, Erhaltungssätze, Invarianzen, u. ä.) erhält man die gewünschten Einspareffekte bei der Stimulationszeit!!

Ein konkretes Beispiel mit 7 Zuständen!

Für die Stimulation wurde ein stochastisches Automatenmodell mit 7 Zuständen entwickelt.
Zur Nachbarschaft der Zelle gehören die zwei Nachbarn jeweils links und rechts. Der eigentlich unendlichen Ausdehnung des Systems wurde durch periodische Randbedingungen mit großer Periode Rechnung getragen.

Die Zellenzahl beschränkt sich im konkreten Fall auf $2^{20} \approx$ 1 Million Zellen.

Zur Vereinfachung wird hier die Tabelle in zwei Tabellen zerlegt.
Die zwei getrennten Tabellen erfassen sämtliche Zustandsüberführungen.

Erstere beinhaltet die vier Zustände „leer", „besetzt", „lösche links" und „lösche rechts".
Die zweite Tabelle beinhaltet die drei restlichen Zustände „leer", „gehe nach rechts" und „gehe nach links".

Damit reduziert man die Tabelleneinträge von 16.807 auf 1.287 (d. h. 1/14).
Die verbleibende Vielfalt der möglichen Regeln wird durch das Verbieten des Überspringens und durch die Forderung der Einfachbesetzung der Zellen weiter stark reduziert.

Eine erfolgreiche physikalische Anwendung: Die Single-file-Diffusion

Beispiel für reduktive Einschränkungen der Zustandszahl: Stimulation der Single-file-Diffusion (Diffusion entlang einer Geraden / enger Kanal).

Man kann sagen, dass im wesentlichen die Ergebnisse aus der Simulation mit dem theoretisch abgeleiteten Verhalten der Gleichung der Single-file-Diffusion für große Zeiten übereinstimmen.

Diese anomale Diffusion beschreibt die folgende Gleichung: $\left\langle \vec{r}^{\,2} \right\rangle = 2\frac{1-c}{c} a^2 \left(\frac{\Gamma t}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}}.$

Die Gitterkonstante a geht quadratisch, die Teilchenkonzentration c relativ kompliziert und die Sprungrate des Einzelteilchens als Wurzelfunktion in die Formel ein.

Die normale Diffusion liegt kennzeichnet eine Proportionalität zwischen der Zeit und dem mittleren Verschiebungsquadrat: $\langle \vec{r}^{\,2} \rangle \sim t$.

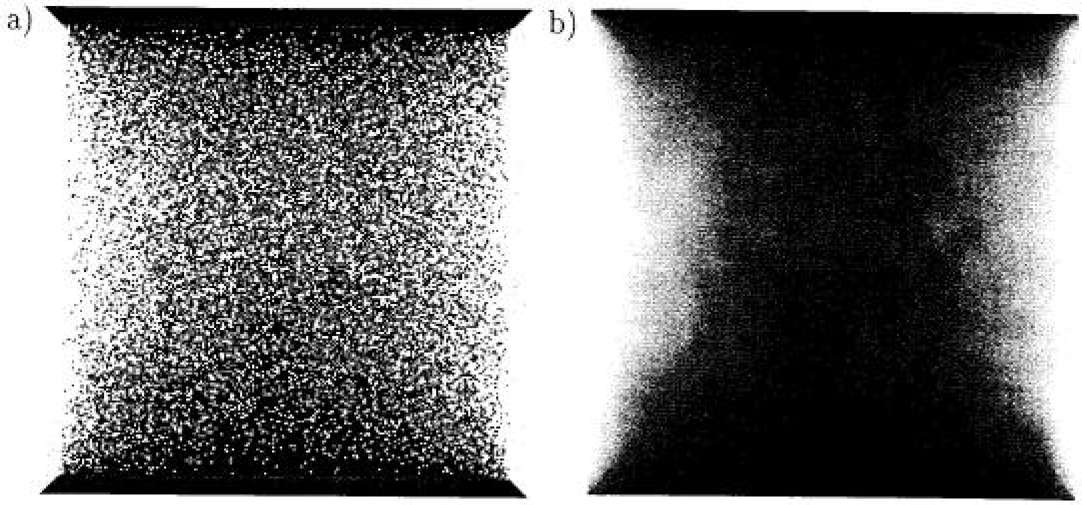
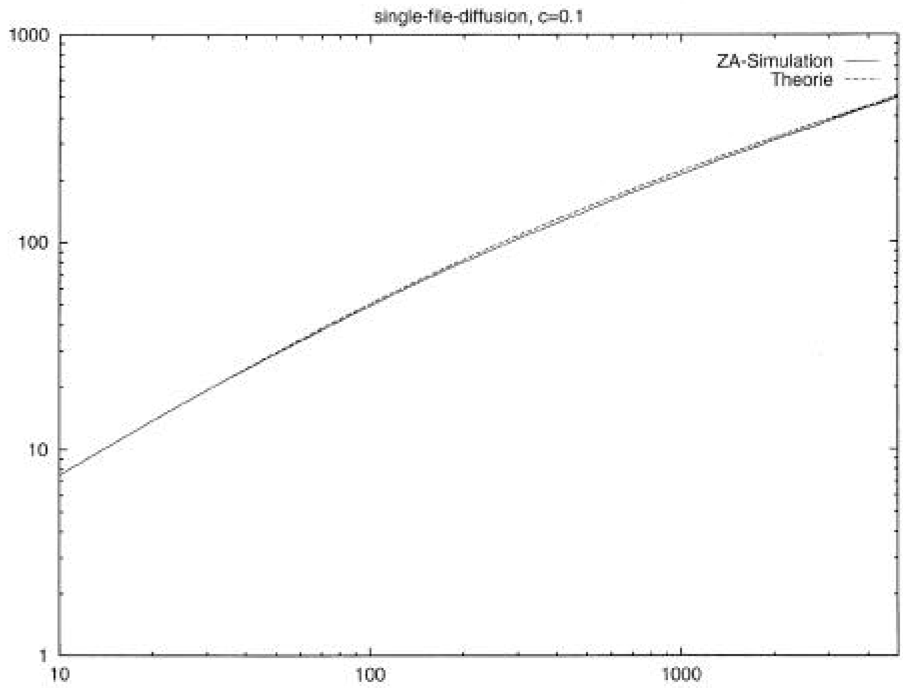


Abb. 2.7: *Simulation der Teilchendiffusion mit konstanten Randbedingungen: a) in Teilchendarstellung, b) als Konzentrationsbild*

Abb. 5: Stimulation der Teilchendiffusion mit konstanten Randbedingungen im Teilchen- und im Konzentrationsbild



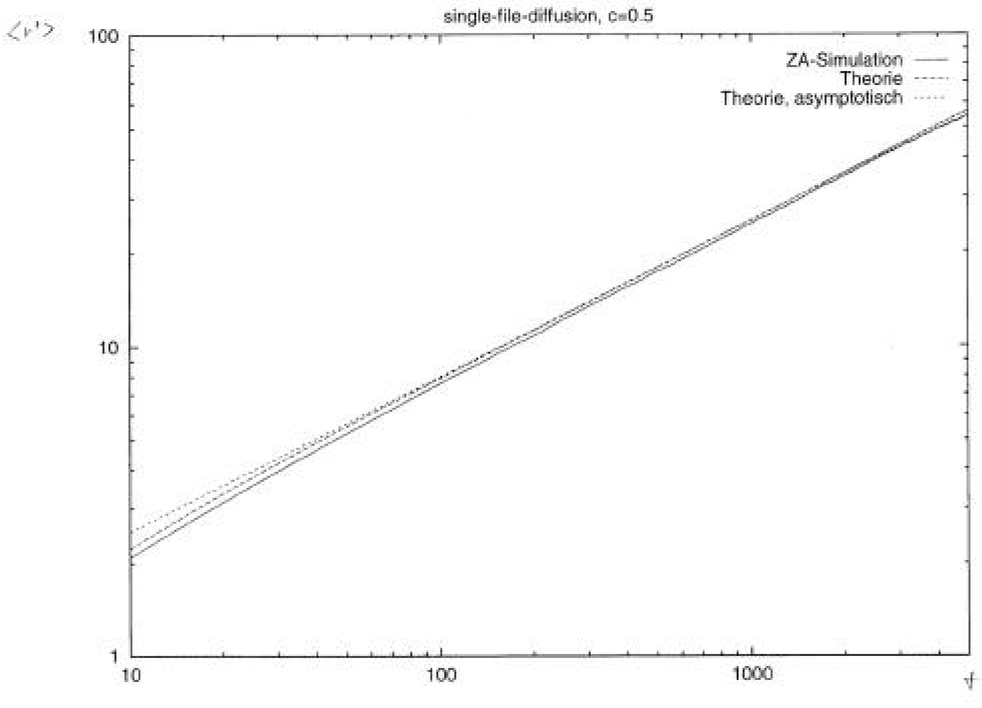


Abb. 6, 7: Vergleich der ZA-Ergebnisse mit den theoretischen Ergebnissen (c groß, klein)

Gibt es andere Wege? Reduktion mit Gesetzesinformation aus der Gleichung!

Ein interessantes Anwendungsbeispiel ist die Lösung der Boltzmanngleichung mit zellulären Automaten [4]. Vorteilhaft ist dabei nicht nur, dass eine Sonderbehandlung der Randzellen wegfällt.

Als Ausgang der Modellüberlegung dient die streng gültige reversible Liouville-Gleichung:

Für die Verteilungsfunktion oder Wahrscheinlichkeitsdichte f($\vec{r},\vec{n},t$) mit den Variablen: Ortsvektor, Geschwindigkeitsvektor und Zeit t, der Kraft und der Masse m:

$$\frac{df}{dt} + \vec{n}\frac{df}{d\vec{r}} + \frac{\vec{F}}{m}\frac{df}{d\vec{n}} = 0 .$$

Irreversible Prozesse werden intuitiv durch einen Stoßterm (harte Stöße, Teilchenbildpunkte verschwinden und entstehen momentan im Phasenraum) berücksichtigt. Auf der rechten Seite

der Gleichung steht dann nicht die Null, sondern der Stoßtherm, der die Bilanz der

Teilchenstöße beschreibt: $\frac{df}{dt} = \int (W(\dot{n}/\dot{n}_1)\, f(\ldots,\dot{n}_1\ldots) - W(\dot{n}_1/\dot{n})\, f(\ldots,\dot{n},\ldots))\, d^3\dot{n}_1$.

Man kennt die Boltzmanngleichung (Boltzmann-Master-Gleichung), die Grundgleichung der kinetischen Gastheorie oder den Prototyp der kinetischen Gleichung als nichtlineare Integrodifferentialgleichung. Die praktisch relevanten Transportgleichungen erhält man durch Mittelung über berechnete Verteilungsfunktionen, z. B. die Strom-Spannungs-Relation. Von praktischem Interesse sind natürlich die Transportkoeffizienten, wie z. B. der elektrische Widerstand eines Systems (z. B. in einer effektiven Beschreibung der Zelldynamik).

Wie gelingt in diesem Fall die Anwendung der ZA?

Um aus den diskreten Bewegungen der Pseudoteilchen kontinuierliche Bahnen zu erzeugen, muß über ein Ensemble der ZA gemittelt werden. Daher gibt es eine mikroskopische Ebene der im dynamischen System verknüpften ZA und die makroskopische Ebene der Mittelwerte, der physikalischen Observablen.

Obwohl die BGL wegen des Streuterms im Impuls- oder $\vec{n}$–Raum nichtlokal ist, kann sie in einen Satz von Gittergas-Gleichungen mit lokalen Regeln transformiert werden.

Der zentrale Punkt der Ableitung ist die Ersetzung der kinetischen Terme der BGL durch effektive Streuwahrscheinlichkeiten, die dann die makroskopische Bewegungsgleichung im Ensemblemittelwert wiedergeben.

Die Gittergasgleichungen erhält man durch Ersetzen der Ableitungen von f durch finite Differenzen erster Ordnung in den o. g. Variablen. Der Übergang von f zur Teilchenzahl- oder Besetzungszahldarstellung geschieht durch die Mittelwertbildung über eine Phasenraumzelle.

Die vergrößerte Gleichung (Mikro $\rightarrow$ Makroskala) ist eine Bilanzgleichung. Der letzte Schritt ist die Diskretisierung (Einführung ganzzahliger Phasenraumbesetzungen und Boolescher Streuraten) der reellen Besetzungszahlen (oder Streuraten), wobei die Mittelung über das Ensemble von ZA die kontinuierlichen Größen reproduziert.

Der Vorteil des Verfahrens liegt in der Entkoppelung von Orts- und Impulsraum. Damit ergibt sich eine einfache lokale Ratengleichung im Ortsraum, die für die ZA strukturangepasst ist.

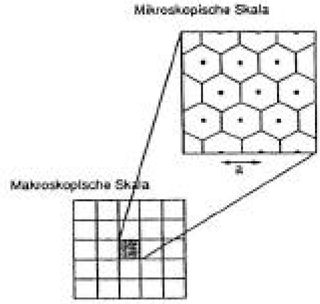


Abb. 3: ZA-Anwendung zur Lösung der BGL (Mikro- und Makroebene, Steuerregeln)

Welche eigene Entwicklungen der zellulären Automaten wurden begonnen?

BUNDESREPUBLIK DEUTSCHLAND

DEUTSCHES PATENT- UND MARKENAMT

Offenlegungsschrift

DE 197 24 313 A 1

Int. Cl.⁶: G 06 F 15/80

Aktenzeichen: 197 24 313.4
Anmeldetag: 10. 6. 97
Offenlegungstag: 17. 12. 98

DE 197 24 313 A 1

Anmelder:
Renner, Uwe, Dr., 04105 Leipzig, DE; Kiefer, Clemens, Dr., 04299 Leipzig, DE; Eisenberg, Wolfgang, Dr., 04129 Leipzig, DE

Erfinder:
gleich Anmelder

Die folgenden Angaben sind den vom Anmelder eingereichten Unterlagen entnommen

Zellulärer Automat

Die Erfindung bezieht sich auf zelluläre Automaten, die aus einer Vielzahl von flächenhaft oder räumlich angeordneten Prozessorzellen bestehen. Zur Reduzierung des Hardwareaufwandes wird die Tabelle extern und global zugänglich gespeichert. Sie wird als Informationsbitfolge synchron mit der Taktbitfolge optoelektronisch mittels Lichtquellen und -empfängern übertragen. Die global gesendete Informationsbitfolge setzt sich aus Synchronwort, Tabelle und Lesewort zusammen. Jede Prozessorzelle bildet nach einer Rechenvorschrift aus den Eigenzustandsworten der Nachbarzellen das Nachbarzustandswort und ermittelt mit ihm aus der Tabelle das neue Eigenzustandswort. Das Eigenzustandswort wird im Zustandsspeicher der Prozessorzelle abgelegt.

DE 197 24 313 A 1

BUNDESDRUCKEREI

Abb. 4: Patent von Dr. U. Renner, Dr. C. Kiefer, Dr. W. Eisenberg – Projektantrag 1997

Im Patent wurde das Prinzip eines zellulären Automaten auf der Grundlage eines optoelektronischen Übertragungsprinzips dargelegt.

Im Gegensatz zu anderen Hardwarelösungen (z. B. CAM6) erfolgt die Realisierung der Automatenregeln nicht in einem externen Prozessor, zu dem die Zustandsinformation erst geleitet werden müssten, sondern gleichzeitig und räumlich parallel autonom in jeder Automatenzelle.
Dies geschieht dadurch, dass einerseits die jeweiligen Zustandsdaten in der Zelle gespeichert werden und andererseits Informationen (Synchronwort, Informationswort- bestehend aus

Eigenzustandswort der Zelle und Nachbarzustandsworten, Leerwort) synchron mit dem Systemakt in einem Datenrahmen den Zellen zugesandt werden.
Die Zustandsverarbeitung erfolgt hier nach dem SIMD-Prinzip (Single Instruction Multiple Data).
Die beiden Informationsströme werden spektral getrennt gesendet. Sie sind die einzigen globalen Signale und können auf vielfache Weise den Zellen zugeführt (z. B. optische Fasersysteme) und getrennt empfangen (z. B. Miniaturphotodioden) werden.

Da sämtliche Regeln gesendet werden müssen, kann der Vorteil dieser zellulären Automaten nur zum Tragen kommen, wenn einerseits die Zahl der Regeln klein ist und andererseits die Zahl der Zellen sehr groß ist.

Diese Zellen wiederum sollten kostengünstig und platzsparend herstellbar sein.

Warum Entwicklung der ZA mit Unterstützung?

Zelluläre Automaten haben eine wichtige Eigenschaft, sie sind vielseitig anwendbar. Daher erlangen sie in den Wissenschaften zunehmend an Bedeutung, so in der Physik, der Biologie, der Chemie der Ökologie und der Ökonomie. Als Stimulationsmodell ermöglichen sie die Untersuchung der auftretenden komplexen Systemabhängigkeiten in der räumlichen und zeitlichen Entwicklung.

Wie sich zeigte, muß die effektive Anwendbarkeit der ZA im Einzelfall analysiert, erkannt und entschieden werden (Beratungszentrum für typische und effektive oder optimale ZA – Anwendungen).

Aber nicht nur dafür brauchen wir finanzielle Unterstützung, sondern auch für die weitere konkrete Entwicklung und den Bau der ZA.

Der damalige Projektantrag erhielt nicht die gewünschte Unterstützung. Die Gründe sind vielfältig.

Es ist weiterhin neben der technischen Strukturierung die Wirtschaftlichkeit der eher als Spezialrechner einzuschätzenden Rechenmaschine ZA mit einem geeigneten günstigen Anwenderspektrum zu verknüpfen.

Literatur: SoftComputing, Patente Abstract

---

1 Renner, U. Zelluläre Automaten – ein ausgewählter Überblick. In. Synergie, Syntropie, nichtlineare Systeme / hrsg. Von W. Eisenberg... – Leipzig: Verlag im Wissenschaftszentrum, H. 3. SoftComputing, Kuriosia.- 2000, S. 31ff.

2 Willers, Fr. A.: Mathematische Maschinen und Instrumente. – Akademie-Verlag, Berlin, 1951, S. 68

3 Vojta, G., Vojta, M. Teubner-Taschenbuch der statistischen Physik, - B. G. Teubner, Stuttgart, Leipzig 2000, S. 441ff.

4 Eisenberg, W., Verallgemeinerte Boltzmann-Gleichungen und die zellulären Automaten. In. Synergie, Syntropie, nichtlineare Systeme/hrsg. Von W. Eisenberg... – Leipzig: Verlag im Wissenschaftszentrom, H. 3. SoftComputing, Kuriosia.- 2000, S. 55ff; siehe auch Vortrag von Eisenberg, W.: Verallgemeinerte Boltzmann-Gleichungen (mit Anwendung der ZA), gehalten im Sommerfeld-Seminar 02/97, 12.03.1997, im WZ Leipzig;