

Rechnender Raum und Digitalteilchen

Uwe Renner, Leipzig

Einleitung

Die Möglichkeiten abstrakter informationsverarbeitender Systeme wie der Rechnende Raum zur Beschreibung physikalischer Systeme beschäftigten Konrad Zuse nach eigenen Angaben seit dem Jahre 1964 [5]. Ein früherer Artikel mit demselben Titel wurde im Jahre 1967 veröffentlicht [2]. In seiner Arbeit „Rechnender Raum“ [3] aus dem Jahre 1969, d. h. vor 40 Jahren, fasste er die ersten Erkenntnisse für eine breitere Öffentlichkeit zusammen. Mit den Ergänzungen aus den Jahren 1993 und 1994 [4, 5], welche kurz vor seinem Tode im Jahre 1995 erschienen, wollte er dem Anliegen einer informationstheoretischen Betrachtungsweise der Natur nochmals Nachdruck verleihen. Hierin bezog er auch neuere Entwicklungen der Physik in seinen Betrachtungen ein. Seine Hoffnung war es, dass Physiker die Sichtweise der Informatik bei der Formulierung physikalischer Gesetzmäßigkeiten mit einbeziehen, so dass hiermit neue Lösungsmöglichkeiten gefunden werden können.

Konrad Zuse stellte sich die Frage, ob die üblicherweise durch mathematische Modelle formulierten physikalischen Gesetze, welche durch den Computer berechnet bzw. simuliert werden, auch direkt durch adäquate rein logische Operationen ausgedrückt werden können. Denn, die numerische Abarbeitung erfolgt algorithmisch nach einem Programm, welches für die jeweilige Hardware in Maschinenbefehle übersetzt werden muss. Somit ist die Lösung einer physikalischen Fragestellung eine Folge von logischen und von Speicheroperationen und im Sinne der Automatentheorie als Folge von Zustandsänderungen der hierbei beteiligten Register aufzufassen, deren Ergebnisse speziell Zahlen bei numerischen Berechnungen sein können. Man könnte folglich die Ansicht vertreten, dass nicht die mathematischen Formulierungen etwa in Gestalt partieller Differentialgleichung die Welt beschreiben, sondern Algorithmen und insbesondere Regeln bzw. Befehle für die Automaten.

Im Vordergrund seiner neuen Sichtweise steht die auf begrifflicher Analogie begründete Beschreibung physikalischer Objekte und Vorgänge mit Mitteln der Informationsverarbeitung und insbesondere durch die Automatentheorie. Der Rechnende Raum ist als zellulärer Automat zu verstehen. Unter dem hier verwendeten Begriff Rechnen ist allgemeiner die Abfolge von – nicht notwendig numerischen – Operationen zu verstehen. Mit der räumlich-parallelen und zustandsbasierten Sichtweise des Rechnens geht er weiter, als mit den von ihm erfundenen und realisierten Computern mit Boolescher Schaltalgebra und zentraler, programmgesteuerter Befehlsverarbeitung, die noch heute Stand der Technik sind [1]. Nicht nur wegen dieser zukunftsweisenden Denkweise kann man Konrad Zuse als einen Visionär seiner Zeit bezeichnen.

Als weiteres, grundlegendes Element benutzt Konrad Zuse das Digitalteilchen, welches eine Abstraktion von Bewegungszuständen physikalischer Teilchen darstellt. Ihre Bewegung im Rechnenden Raum erfolgt in mehreren Phasen in komplexen Mustern durch „Fortschalten“. Wie Konrad Zuse zeigt, können die Wechselwirkungen von Digitalteilchen räumlich nichtlokal über viele Zwischenschritte erfolgen. Digitalteilchen sind in der Regel keine Punktteilchen. Da zudem die Zustandsüberführungen mit der Zeit über komplexe Operationen erfolgen, ist der nächste Zustand ohne Kenntnis des Algorithmus oftmals nicht vorhersagbar und die Folge der Zustandsüberführung kann unscharf bzw. zufällig erscheinen.

Durch diese und weitere von Konrad Zuse eingeführten Begriffe wie Schaltvolumen und Informationsumsatz wird eine neuartige, informationsorientierte Beschreibungsweise

natürlicher Vorgänge versucht. Seine Interpretation des Kosmos als gigantischer zellulärer Automat gehört folgerichtig zur konsequenten informations-orientierten Sichtweise. Die folgenden Bemerkungen möchten die grundlegenden Gedanken von Konrad Zuse zum Rechnenden Raum und zum Digitalteilchen in einer interpretierenden Weise näherbringen.

Automatentheorie – Die Grundlage zur Beschreibung des Rechnenden Raumes als zellulärer Automat

Der Automatentheorie und der damit verbundenen Denkweise wird durch Konrad Zuse eine Schlüsselrolle bei der begrifflichen Fassung des Rechnenden Raumes und der Digitalteilchen zugeschrieben. Sie bildet zugleich die Grundlage seines hypothetischen Kosmos als riesiger zellulärer Automat. Der Zustand eines Automaten ist die ihn charakterisierende Größe und Element einer Zustandsmenge, dem Alphabet von Symbolen (z. B. -1, 0, +1). Die zeitlich-diskrete Transformation des Zustandes erfolgt innerhalb dieser Zustandsmenge in Abhängigkeit des eigenen Zustandes und denen der Eingangsgrößen.

Der Rechnende Raum ist ein Zellularautomat bzw. zellulärer Automat, der aus sehr vielen solcher Einzelautomaten in einer räumlich-zellulär strukturierten und parallelen (zumeist regulären, insbesondere periodischen) Anordnung besteht. Seine Einzelautomaten sind über eine Nachbarschaftsrelation topologisch verknüpft. Die Zustandstransformation wird durch algebraische Vorschriften (z. B. logische Operationen wie UND, ODER, NICHT), Regeln (wenn ..., dann ...), Zustandstabellen oder über Zustandsdiagramme beschrieben. Lässt man nur die logischen Wahrheitswerte 0 und 1 zu, dann ist der Rechnende Raum ein Entscheidungsraum, in dem die räumlich verteilten Boolesche Operatoren die Wahrheitswerte der Zellen berechnen. Den Rechnenden Raum kann man sich als abstrakten Raum aus Speicherzellen (Flip-Flops) bzw. Registern bestehend vorstellen, die in einer gewissen Geometrie und Nachbarschaftstopologie angeordnet sind, wobei ein „Rechenprogramm“ die Inhalte der Speicherzellen in definierter Weise ändert. Als Speicherzelle kann jedes Element dienen, welches Zustände eine gewisse Mindestzeit „speichern“ kann, auch Atome im Kristallgitter oder Moleküle in einem Polymer.

Für Konrad Zuse stellt die „Ergibtform“, d. h. die explizite Formulierung der Ursache-Wirkungs-Kette durch eine Zuweisungsvorschrift für den neuen Zustand, eine zweckmäßige Voraussetzung dar. Allgemeiner lassen sich mit einem zellulären Automaten, der ein Äquivalent einer Turing-Maschine darstellt, alle algorithmisch erfassbaren Probleme und Vorgänge berechnen. Komplexere Zustandstransformationen lassen sich auf eine Folge elementarer Transformationen zurückführen. Obwohl Konrad Zuse von Zeittakten spricht, diskutiert er bei den Eigenschaften des zellulären Automaten nicht den Begriff der Synchronität bei Zustandsaktualisierungen. Demnach muss diese für ihn nicht notwendig zeitsynchron erfolgen, so wie diese sonst bei zellulären Automaten üblicherweise geschieht. Damit vermeidet er das Problem einer absoluten Zeit.

Konrad Zuse schwebt als technische Realisierung ein zellulärer Automat vor, bei dem jede Zelle ein komplettes Rechenwerk enthält, das sowohl informationsverarbeitende als auch informationspeichernde Elemente enthält. Als weitere Entwicklung sieht er den Netzautomaten an, wobei die Zellen nur die Informationsverarbeitung übernehmen und die Verzweigungslinien sowohl der Informationsübertragung als auch der Speicherung dienen. Hierbei stellt sich ergänzend die Frage wie diese Architektur des Rechnenden Raumes im kosmischen Maßstab, im Universum, aussieht. Wie und wo werden hierin die Programme ausgeführt, und wo sind diese gespeichert – in den Zellen selbst? Gibt es eine globale Programmsteuerung oder erfolgt diese lokal und autonom?

Digitalteilchen – Die „Elementarteilchen“ des Rechnenden Raumes

Die mathematische Berechnung der Bahnen einzelner Teilchen sowie der dabei auftretenden Stoßvorgänge ist zwar prinzipiell durch die Lösung der Bewegungsgleichungen mittels reeller Zahlen möglich, für die Beschreibung der Bahnen im Computer wäre aber ein überabzählbar unendliches Äquivalent erforderlich, so dass es bei der praktischen Realisierung mit endlicher Stellenzahl zwangsläufig zu Rechengenauigkeiten kommt, die zu unrealistischen Ergebnissen führen können. Die ursprüngliche, mathematische Beschreibung der Natur durch reelle Zahlen steht somit im unauflösbarem Widerspruch zu den Möglichkeiten diskreter Zustandsautomaten, welche nur eine abzählbare, wenn auch große, Informationsmenge erfassen können. Eine Erweiterung der Stellenzahl verschiebt das Problem mit steigendem Aufwand, so insbesondere für die numerischen Operationen Multiplikation und Division. Dieser „Informationskatastrophe“ kann man durch eine physikalisch motivierte, vergrößerte Beschreibung des Raumes entkommen, mit der Hoffnung, dass nicht wesentliche Information über das System verlorengeht. Natürliche, untere Skalengrenzen könnten den Abbruch zusätzlich begründen. Damit stellt sich aus der Sicht der Informationstheorie die fundamentale Frage, ob die Natur tatsächlich nur durch eine so riesige, nichterfassbare Informationsmenge beschreibbar ist. Nimmt man die Messbarkeit als wesentliches Kriterium für eine adäquate Beschreibung der Natur, dann ergibt sich als weitere Problematik die Nichtrealisierbarkeit einer beliebig genauen Messung aller Zustandsgrößen des Raumes, sei es durch die Beschränkung der Anzahl abtastbarer Messwerte oder der Endlichkeit der Stellenzahl infolge der zur Messung verfügbaren Zeit oder bei zeitlich veränderlichen Größen durch die aus der Kommunikationstheorie von D. Gabor [12] bekannte Zeit-Frequenz-Unschärferelation.

Konrad Zuse stellte sich daher dem Problem, wie weit man die durch Differentialgleichung vorgegebene Teilchendynamik durch Differenzenbildung vergrößern kann, dass noch wesentliche physikalische Eigenschaften erhalten bleiben, also was die „größte Digitalisierung“ ist. Dazu entwickelte er für ein eindimensionales, hydrodynamisches Beispiel ein auf Druck und Geschwindigkeit sowie deren Differenzen beruhendes Rechenschema, das allein mit den Werten -1 , 0 , $+1$ auskommt. Die vier aus den Geschwindigkeits- und Impulswerten $+1$ und -1 gebildeten stabilen Elementarformen, die man als komplexe Einheit zu verstehen hat, nennt er „im übertragenen Sinne“ Digitalteilchen. Die nunmehr als symbolhaft anzusehenden Operationen kann man sich als Zustandsüberführungen eines linearen zellulären Automaten mit jeweils drei Zuständen für Druck und Impuls vorstellen, wobei die 0 das Nichtvorhandensein des Teilchens beschreibt. Dabei sind aber nicht alle Konfigurationen erlaubt. Er bemerkt, dass auch instabile Ausbreitungsformen möglich sind, die sich nicht voll mit den Erhaltungssätzen in Einklang bringen lassen. Für die Realisierung der Operationen gibt Konrad Zuse eine schematische Darstellung eines Rechnenden Raumes an. Da die Operationen linear sind, kann es im betrachteten Modell aber zu Überlagerungen kommen, für die Zustandswerte größer 1 nötig wären, damit Teilchen einander passieren können. Alternativ zur Erweiterung der Zustandsmenge kann man das Verhalten nichtlinear gestalten, so zur Beschreibung der Wechselwirkungen bzw. Reaktionen von Teilchen oder deren Abstoßung. Nach der Wechselwirkung könnten völlig neue Teilchen entstehen.

Die Ausbreitung der Zustände über die Folge von Zustandstransformationen bezeichnet Konrad Zuse als schrittweises Fortschalten. In diesem Zusammenhang nimmt er eine Unterscheidung der Schaltgeschwindigkeit (maximale Ausbreitungsgeschwindigkeit eines Zustandes) von der Schallgeschwindigkeit (tatsächliche Ausbreitungsgeschwindigkeit des Digitalteilchens) vor. Die nur im Rechnenden Raum definierte Schaltgeschwindigkeit besitzt keinen physikalischen Bezug und hat hierin nur eine räumlich-lokale Bedeutung.

Zwischen den Schritten des Fortschaltens kann ein Digitalteilchen verschiedene Konfigurationen durchlaufen, deren Phasen für den Außenstehenden unbestimmt erscheinen können. Die Wechselwirkung der Digitalteilchen, etwa der Stoß, entspricht dann einem gemeinsamen temporären Bindungszustand, ähnlich der chemischen Bindung. Für die zeitliche Beschreibung physikalischer Prozesse durch zellulären Automaten gibt es Grenzen, deren Ursache in den Mikrostrukturen des Gitters zu suchen sind und bei Nichtbeachtung zu anormalem Verhalten in der Mikroskala führen können. Zur Vermeidung müssen die physikalischen Ausbreitungsgeschwindigkeiten viel kleiner als Schaltgeschwindigkeiten sein.

Man kann den Rechnenden Raum zur Erzielung eines bestimmten Verhaltens vorkonfigurieren bzw. strukturieren. Je nachdem wie die Digitalteilchen hierin angeordnet werden, kann es am Kreuzungspunkt der Bahnen zu Kollisionen kommen, aber nur dann, wenn es die Bewegungsphasen der Teilchen ermöglichen. Es besteht eine enge Kopplung der Digitalteilchen an die Raumstruktur. Das Kollisionsverhalten ist auch über große Entfernungen vorbestimmt, so dass man von einer nichtlokalen Korrelation [4] sprechen kann. In [5] führte Konrad Zuse zur Veranschaulichung der möglichen Platzierung sich bewegender Teilchen mit unterschiedlichem Kollisionsverhalten auf dem Gitter den Vergleich mit weißen und schwarzen Läufern auf einem Schachbrett an, wobei die Läufer auf Feldern mit unterschiedlichen Farben nicht kollidieren. Sie gehören zu unterschiedlichen Diagonalklassen. Derartige Teilchen und Anti-Teilchen bewegen sich auf den dualen Gittern scheinbar unkorreliert. Er bemerkte außerdem, dass die Teilchenzwillinge wechselwirken könnten, falls „versteckte“ Algorithmen eine Wechselwirkung erlauben. In den Beispielen werden Digitalfelder und Digitalteilchen getrennt voneinander behandelt. In Anlehnung an die moderne Feldtheorie, wonach Elementarteilchen durch Singularitäten der Felder erklärt werden können, hoffte er diese Anschauung mit aufgreifen zu können.

Ein wichtiges Anliegen für Konrad Zuse war es, automatentheoretische Äquivalente zu realen physikalischen Größen zu finden. In der digitalen Beschreibungswelt sollten die Digitalteilchen als physikalische motivierte Abstraktion dienen, welche sich in einer oder in mehreren diskreten – nicht notwendigerweise Euklidischen – Gitterwelten analog realen Teilchen bewegen. Die Digitalteilchen können als Zustandskomplexe aufgefasst werden. Ihre Bewegung kann man sich als Metamorphose über mehrere Phasen vorstellen. Die Teilchenbahnen ergeben sich erst im Mittel. Obwohl zwischen den Digitalteilchen komplizierte Wechselwirkungen auftreten können, müssen gewisse physikalische Erhaltungssätze erfüllt werden. Die Kollisionsregeln hierfür unterscheiden sich von denen beim sogenannten „Life“-Spiel, so etwa für die dortigen Gleiter-Objekte, die eben nicht physikalisch motiviert sind, sondern einer Überlebensstrategie folgen. Die Vorstellungen von Zuse über die Wechselwirkung gehen weiter, als sie etwa in den Gittergasmodellen wie dem HPP- oder dem FHP-Modell und dessen Erweiterungen berücksichtigt werden [7, 8].

Die Bewegungsformen speziell konstruierter Digitalteilchen auf einem zweidimensionalen Gitter (Monopods, Bipods und Komplexe) wurden von Konrad Zuse sehr detailliert beschrieben und werden in einem späteren Abschnitt zusammengefasst. Untersuchungen zu den Bewegungsformen von Digitalteilchen im dreidimensionalen Raum wurden in der Ursprungsarbeit „Rechnender Raum“ [3] zwar angedeutet, aber erst ca. 25 Jahren später in [4, 5] fortgeführt. Auch hierin lassen sich die Bewegungszustände durch Zustände (Pfeile) symbolisieren. Bemerkenswert ist, dass man in der dritten Dimension qualitativ neuartige Phänomene beobachten kann, falls man von der zweidimensionalen projektiven Gitterwelt (die Welt der Bipods) zur dreidimensionalen Welten (die Welt der Tripods) übergeht. Auf einem solchen Gitter ergeben sich für die Fortbewegung der Digitalteilchen entlang einer festen Diagonalrichtung zwei Möglichkeiten. So kann man links- von rechtslaufenden

Bewegungsmustern der Zustandspfeile unterscheiden, wobei sich die Teilchen durch den Raum entlang eines scheinbaren Gewindes „schrauben“. Diese Polarisierungseigenschaft setzt sich im ganzen Raum fort und ist von lokalen Spins zu unterscheiden. Diese Symmetrieeigenschaft bezeichnet Konrad Zuse als Chiralität. Die Wechselwirkungen der dreidimensionalen Digitalteilchen können sehr kompliziert sein. Leider konnte Konrad Zuse die Untersuchungen hierzu nicht weiterführen.

Informationstheoretische Betrachtungen

Informationsgehalt eines Digitalteilchens und Informationsumsatz

Nach Konrad Zuse ist der Begriff des Informationsgehaltes durch die Informationstheorie bezüglich Nachrichtenübertragungssysteme definiert. Der Begriff Informationsgehalt hat hier vordergründig nur für den Menschen als Empfänger einer Nachricht einen Sinn. Er lässt diesen Begriff aber auch auf messbare Größen zu, etwa für die Quantenmechanik, „welche sich zur Aufgabe stellt, lediglich die messbaren Größen in ein mathematisches Schema zu bringen“. Für nicht belebte Systeme lässt er den Begriff des Informationsgehaltes dann zu, „wenn man die Variationsbreite der möglichen Gestaltung eines Gegenstandes, Musters oder dergleichen betrachtet“, die man in Bit messen kann. Für einen finiten Automaten lässt sich eine maximal mögliche Informationskapazität angeben, wenn man die Zahl seiner möglichen Zustände als Maß nimmt. Ist diese n , dann ist der Informationsgehalt $Ld(n)$. Der höchst mögliche Informationsgehalt wird dann erreicht, wenn die einzelnen Zeichen gleichverteilt sind, also die maximale Entropie erreicht ist, womit der Informationszuwachs nach dem Lesen der Nachricht am größten ist (keine Redundanz und keine Prognose durch Vorwissen). Dieser ist vom dargestellten Inhalt für nicht belebte Systeme unabhängig und kann sich im Verlaufe einer Rechnung nicht erhöhen, außer für wachsende Automaten. Ein Digitalteilchen nimmt zu einem bestimmten Zeitpunkt ein bestimmtes Raumbgebiet ein, womit seine Informationskapazität durch die hierin möglichen Zustände bestimmt wird, auch wenn nicht alle Variationen als stabile Muster durchlaufen werden. Man kann die Muster hinsichtlich Typ (z. B. verschiedene Elementarteilchen), Richtung und Geschwindigkeitsbetrag und Phasenlage klassifizieren. Die Zahl der möglichen Variationen bestimmt den Informationsgehalt.

Speziell hinterfragt Konrad Zuse die Forderung nach der Erhaltung der Information, so bei den Reaktionen zwischen Digitalteilchen. Die Problematik diskutiert er an einem Pfeil-Additionsmodell, bei dem zur verlustfreien Darstellung die nötige Stellenzahl erhöht werden müsste, oder als Alternative die Umwandlung zu einem neuen Teilchentyp erfolgt. Jedoch betont er: „Die hier gewählten Beispiele für Digitalteilchen sind also noch viel zu einfach, um in eine engere Beziehung zu physikalischen Vorgängen gesetzt werden zu können.“ Dazu benötigt man Digitalteilchenmodelle mit entsprechenden Termen. Eine Festlegung der Gestalt der Digitalteilchen schränkt die Darstellungsmöglichkeiten gleichfalls ein, was den Informationsgehalt verringert. Konrad Zuse folgert daher: „Erhaltung der Information und Erhaltung der Gestalt stehen also in einem gewissen Widerspruch zueinander.“

Der abstrakte Begriff Informationsumsatz ist für Konrad Zuse mindestens ebenso wichtig wie der Begriff des Informationsgehaltes, wobei dieser die Erhaltung dynamischer Eigenschaften beschreiben soll und den Schaltvorgang bewertet. Als Beispiele führt er die „Erhaltung des Geschehens“ oder die Erhaltung der „Kompliziertheit des Geschehens“ an. Rein spekulativ, in Anlehnung an die Physik folgert er, wenn man dem Wirkungsquantum die Dimension Schaltvorgang zuordnet, dann besitzt die Energie die Dimension „Schaltvorgang pro Zeiteinheit“ und der Energieerhaltungssatz kann als „Satz von der Erhaltung des Geschehens“ interpretiert werden. Somit steht die Energie mit dem

Geschehen und das Wirkungsquantum mit der schaltungsgemäßen Wirkung in enger Beziehung.

Unbestimmtheitsrelation, Kausalität, Determination und Reversibilität, Wahrscheinlichkeit und Intensitätsdarstellung

Als Analogie zur Heisenberg'schen Unbestimmtheitsrelation führt Konrad Zuse die Darstellung zweier Größen A und B mit einer gemeinsamen Speicherkapazität von m Bit an. Besitzt A eine Stellenzahl n , dann beträgt der relative Fehler 2^{-n} und entsprechend $2^{-(m-n)}$ für B. Das Fehlerprodukt ist dann 2^{-m} . Sind beides konjugierte, abgeleitete Größen, so kann man sie nicht mit maximaler Genauigkeit darstellen. Auch bei völliger Unbestimmtheit der einen Größe lässt sich die andere nur mit der durch die maximale Stellenzahl gegebene Genauigkeit angeben.

Der Ausdruck Kausalität wird im Sinne von Determination verstanden, womit „die Bestimmung der Folgesituation eines abgeschlossenen Systems als Funktion des vorhergehenden Zustandes“ gemeint ist. Dies gilt gleichfalls für einen als Zustandsautomaten gekennzeichneten Kosmos. Der Übergang von einem Zustand in den anderen erfolgt ohne Zwischenstufen. Konrad Zuse betont den durchgängig diskreten Charakter, der ein „Denken in unstetigen Übergängen“ erfordert und „bei denen das Kausalgesetz durch Algorithmen formuliert ist“. Diese stufenlosen Übergänge unterscheiden sich von denen im Atom. Im Gegensatz zur (reversiblen) klassischen Mechanik sind bei finiten Automaten die Gesetze per Definition nur für die Zustandsüberführung in positiver Zeitrichtung determiniert. In negativer Richtung kann es in bestimmten (konstruierten) Fällen eine „Pseudodetermination“ geben. Für das freie Digitalteilchen ist die Determiniertheit klar. Auch bei der nicht umkehrbaren Reaktion zweier Teilchen wird der Vorgang durch die Schaltgesetze bestimmt. Für den umgekehrten Vorgang der Umwandlung in zwei Teilchen (Zerfall) besteht jedoch keinerlei Veranlassung oder man führt hierfür Wahrscheinlichkeiten ein und wenn man dies ausschließt, benötigt man eine Uhr, mit der man die Teilung zeit- und zustandsgesteuert auslösen kann. Man könnte den Zerfall ebenso von der Umwelt (Felder) abhängig auslösen.

Eine mit den Vorgängen verbundene zeitliche Zunahme der Entropie ist nicht notwendig an Wahrscheinlichkeitsgesetze gebunden, sondern lässt sich automatentheoretisch mit streng deterministischen Modellen erklären (Informationsverlust). Er verweist darauf, dass „die Gültigkeit der Determination insbesondere in beiden Zeitrichtungen absolute Genauigkeit der einzelnen Vorgänge“ voraussetzt und betont: „Es ist praktisch unmöglich, ein solches Modell rechnerisch exakt zu simulieren, da man mit unendlicher Stellenzahl rechnen müsste.“ Diese ist der Grund, warum Konrad Zuse die Determination in beide Zeitrichtungen (zeitliche Symmetrie) weiter hinterfragt: „Dies führt dazu, dass die Simulierung universeller Systeme mit in beiden Richtungen wirkender Kausalität wohl zu den ‚unberechenbaren‘ Problemen gehört.“ Im Sinne der Forderung nach Berechenbarkeit stellt sich damit die Frage: „Sind wir berechtigt, ein Modell der Natur anzunehmen, für das es kein rechnerisches Simulationsmodell gibt?“

Der Begriff der Wahrscheinlichkeit lässt sich über die Festlegung des Folgezustandes in Abhängigkeit von Wahrscheinlichkeitswerten in die Automatentheorie einführen. Ein Problem sieht Konrad Zuse in der Erzeugung von Zufallszahlen in finiten Automaten, die man rein deterministisch als Pseudozufallszahlen erhält. Möglicherweise kann man aber einen komplizierte Mechanismus der Natur verwenden, der diese Werte auswürfelt oder der Rechenautomat bezieht die Zufallswerte von außen als Eingabewerte. Ein solcher externer Zugriff stünde aber im Widerspruch zu einem Kosmos als autonomer Zustandsautomat. Außerdem stellt sich die Frage, was „echter“ Zufall überhaupt ist und, ob es einen vom Automaten system unabhängigen „echten“ Zufall überhaupt gibt. Heute

lassen sich recht brauchbare Pseudozufallsgeneratoren konstruieren, die eben auf zellulären Automaten basieren.

Die Intensität ist für die Darstellung der Feldstärken und anderer numerischer Größen wichtig. Diese kann man etwa aus der Verteilung der logischen Werte bestimmen, was für die Erfassung vieler Größenordnungen eine große Anzahl an Gitterpunkten erfordert. Konrad Zuse schlägt als rationellere Methode das Stellenwertprinzip vor, dass als Addierwerk aus nebeneinander liegenden Zellen mit hierarchischer Ordnung realisiert wird. Jedoch müssen auch diese im Raum verteilt werden, wodurch kaum eine kompaktere Anordnung entsteht. Wenn jeder Zelle ein solches Addierwerk zugeordnet wird, indem jede Zelle entsprechend untergliedert wird, entstünde eine zusätzliche Schichtdimension für den Additionsautomaten.

Digitalteilchen im zweidimensionalen Rechnenden Raum – Programmbeispiel

Die Vielfalt der Wechselwirkung an Digitalteilchen lässt sich im zweidimensionalen Rechnenden Raum eindrucksvoll veranschaulichen, wobei zugleich die Besonderheiten und Unterschiede zu den herkömmlichen zellulären Automatenmodellen wie dem HPP-Modell bzw. den FHP-Modellen deutlich werden. Die erweiterte zweidimensionale Betrachtung wird auch dadurch motiviert, weil es im zweidimensionalen Raum neue stabile Gebilde wie etwa „digitale Elementarwirbel“ geben könnte. Zur vereinfachten Beschreibung wird ein äquidistantes, orthogonales Gitternetz verwendet. Als Zustands-Transformation gibt Konrad Zuse in Anlehnung an den eindimensionalen, hydrodynamisch motivierten Fall einfache Gesetze für die x- und y-Geschwindigkeitskomponenten und für den Impuls an. Speziell wird ein Dreizustandsmodell mit den Zuständen $(-, 0, +)$ betrachtet, wobei in der geometrischen Darstellung Pfeile die jeweilige Bewegungsrichtung symbolisieren. Ein isolierter Pfeil besitzt die Eigenschaft, dass dieser pro Zeiteinheit auf den jeweiligen nächsten Gitterpunkt verschoben wird. Zwei entgegengesetzte Einzelpfeile heben sich auf und zwei gleichgerichtete Einzelpfeile ergeben einen einzigen neuen Pfeil. Im Unterschied hierzu schalten sich kreuzende Pfeilpaare (Bipods genannt) über mehrere Phasen fort, die von der Auflösung bis zur erneuten Zusammenführung reichen. Die Konstellation des Bipods stellt eine Einheit dar, die, solange sie nicht gestört wird, sich diagonal bewegt. Ein solches komplexes Gebilde definiert beispielhaft ein spezielles Digitalteilchen mit Eigenschaften, welche physikalischen Wechselwirkungen realer Teilchen ähneln. Mit dem Modell lassen sich z. B. Reaktionen zweier in einem Schnittpunkt treffender Teilchen beschreiben. Man kann zudem Startkonstellationen finden, bei denen stabile „Nester“ entstehen. Diese sind außerdem in der Lage Teilchen zu vernichten, ohne selbst aufgelöst zu werden. Ähnliche stabile Formen findet man analog bei Conways „Life“-Spiel.

Das Modell lässt sich auf unterschiedlich lange Pfeile erweitern, wobei das Additionsgesetz für Pfeile gleicher Richtung gelten soll. Bei den Bipods ungleicher Pfeillänge wird der längere Pfeil auf die Länge des senkrecht stehenden kürzeren Pfeils verkürzt. Allgemein können diese Digitalteilchen als „Überlagerung“ aus einem Bipod mit gleichlangen Beinen (oder als mehrfache Überlagerung einfacher Bipods) – von denen es auf dem orthogonalen Gitter vier Klassen gibt, nämlich $(1,1)$, $(1,-1)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$ – und einem isolierten Teilchen (oder als mehrfache Überlagerung einfach isolierter Teilchen) verstanden werden, wobei die Länge 0 zulässig ist. Das isolierte Teilchen pflanzt sich wie gehabt in der ursprünglichen Richtung fort, wobei dem möglicherweise ursprünglich in gleicher Richtung befindlichen Nachbarzustand der gekürzte Anteil zugeschlagen wird. Für das Bipod gelten ähnliche Gesetze wie für das einfache Digitalteilchen. Die Bewegungsrichtungen und Phasen ergeben sich aus dem Verhältnis der ganzzahligen Pfeillängen.

Solche Digitalteilchen lassen sich „als Störungen eines Normalzustandes eines zellularen Automaten aufzufassen“ und als Muster mit periodischen Änderungen interpretieren, die sich infolge der Zustandsänderungen („fließende Zustände“) im Raum scheinbar bewegen. In Anlehnung an John von Neumann kann man die „Digitalteilchen auch als sich selbst reproduzierende Systeme auffassen“ [11], da sie sich in einem Nachbargebiet neu erzeugen, wobei sie sich am alten Ort auflösen. Die Zustände des Teilchens verteilen sich während der Zustandsänderung auf Nachbargitterpunkte, so dass eine Ortsbestimmung nicht eindeutig möglich ist. Aus der Ferne und mit geringerer räumlicher und zeitlicher Auflösung betrachtet, kann man zwar ein sich bewegendes, verschwommenes Objekt erkennen. Bei größerer Auflösung erschließt sich einem die innere dynamische Struktur aber nur mit Kenntnis des Bewegungsalgorithmus, der aber beliebig komplex sein kann, etwa pseudozufällig, oder einem Codierungsalgorithmus entspricht.

Für die so konstruierten Digitalteilchen können, wenn sie sich im Nullphasenpunkt treffen, viel komplexere Reaktionen stattfinden als im eindimensionalen Fall. So existieren Konstellationen von sich scheinbar in Kollision befindlicher Digitalteilchen, bei denen obwohl Zustandsänderungen erfolgen, diese sich schließlich unverändert wieder trennen. Wiederholt man den Versuch mit einer etwas abweichenden Startkonstellation, dann kann es jedoch zu einer Reaktion kommen, bei der aus zwei Digitalteilchen ein neues mit geänderter Bewegungsrichtung entsteht. Für den außen stehenden Beobachter ist das Ergebnis nicht ohne weiteres erkennbar und die Möglichkeiten erscheinen gleich wahrscheinlich, vor allem, wenn das Gitter sehr engmaschig ist. Dieses Verhalten weist auf pseudozufällige bzw. chaotische Eigenschaften hin. Zugleich ergibt sich die Möglichkeit, die Gitterpunkte und die sich darauf bewegenden Digitalteilchen in Klassen reagierender Teilchen einzuteilen. Insbesondere kann die Klassifizierung hinsichtlich der Gitterdiagonalen erfolgen. Konkret weist Konrad Zuse darauf, dass sich die Teilchen dann ähnlich den Läufern auf den weißen bzw. schwarzen Feldern eines Schachbretts bewegen könnten. Die Einteilung macht den Eindruck, als ob sich die dualen Teilchen in parallelen, eng benachbarten Welten bewegen, zwischen denen es zunächst keine Wechselwirkung gibt. Da diese aber vom konkret verwendeten Schaltgesetz abhängt, könnten noch unbekannte Algorithmen die Schaltgesetze derart abändern, dass ein Wechselwirkung möglich wird.

Im Anhang befindet sich ein in MATLAB geschriebenes Programm, welches die Welt der zweidimensionalen Digitalteilchen simulieren und visualisieren kann. Dazu werden einige Konfigurationsbeispiele aus dem Buch „Rechnender Raum“ [3] angegeben. Die Digitalteilchen werden als lokales Zustandsgebilde in einem zellulären Automaten realisiert, wobei der parallele Charakter der Zustandstransformationen durch die Matrixdarstellung und die MATLAB-spezifische Indizierung der Nachbarn realisiert wird.

Relativitätstheorie und die Problematik der Gitterstruktur

Die einfache, periodische Gitterstruktur des Raumes führt zu Problemen und Widersprüchen, denen sich Konrad Zuse sehr wohl bewusst war. Als Bedenken gegenüber einer regelmäßigen Gitterstruktur wird angeführt, dass es Vorzugsrichtungen gibt, was der allgemein anzunehmenden Isotropie des kontinuierlichen Raumes widerspricht. Er sieht in der Verwendung der orthogonalen Netzwerke auch nur den „bequemsten Weg“. So argumentiert er, „daß Gesetze für eine gitterförmige Raumstruktur denkbar sind, welche im Bereich kleinerer und mittlerer Energien und Frequenzen die Gitterstruktur nicht in Erscheinung treten lassen“, wofür die Gitterkonstante „wesentlich kleiner angenommen werden als die elementare kleinste Länge“. Gekrümmte Räume wie für die Behandlung in der allgemeinen Relativitätstheorie sind für Konrad Zuse kaum vorstellbar, außer in solchen Fällen, wo man die kartesische Struktur etwa auf den Torus abbilden kann. Ob

reguläre, geometrische Konstruktionsprinzipien wie die Penrose-Parkettierungen oder statistisch eingebaute Störungen die Problematik entschärfen können, bleibt noch zu prüfen. Außerdem wird durch die Festlegung eines Gitters ein Inertialsystem ausgezeichnet, was im Widerspruch zur Relativitätstheorie steht. Als Ausweg verweist er auf die Möglichkeit, die „Schaltung als Funktion der Ergebnisse der vorhergehenden Ablaufs“ einzuführen, so dass „sich gesetzmäßig veränderliche Schaltungen entwickeln“. Auch könnte ein pseudozufälliger Ablauf die Problematik entschärfen. Die Möglichkeit zur dynamischen Umkonfiguration des Raumes enthält dann konsequenterweise die sich ändernde Topologie der Nachbarschaftsbeziehungen und wechselnde Regelwahl. In diesen Veränderungen ist die Möglichkeit eines wachsenden Automaten begriffen. So können neue Gitterpunkte generiert und zu diesen Verknüpfungen hergestellt werden. Allgemein fordert Konrad Zuse aber eine gewisse Unabhängigkeit der Regeln von der zugrunde gelegten speziellen Geometrie.

Eine weitere Schwierigkeit sieht Konrad Zuse darin, die Relativitätstheorie und speziell die Lorentz-Transformation zu digitalisieren, welche die Beziehung zwischen den Inertialsystemen herstellt. Es stellt sich die Frage, ob die Zustandstransformationen invariant formuliert werden können. Hierzu hat er den Begriff des Schaltvolumens eingeführt: „Dieses ist gleich der Zahl der beteiligten Schaltglieder mal der Zahl der Schaltakte, welche an einem Vorgang ... beteiligt sind“. Ist das Schaltvolumen für ein im Inertialsystem ruhendes Teilchen gegeben und bewegt es sich bezüglich eines anderen, so bleibt dieses Schaltvolumen invariant („Invarianz des Schaltvolumens“). Die Forderung nach der relativistischen Invarianz müsste, wenn große Ausbreitungsgeschwindigkeiten relevant sind, bei allen physikalisch-orientierten Regeln berücksichtigt werden. Dies ist gleichfalls für die Hypothese des Kosmos als zellulären Automaten relevant. Einen gewissen Ausweg sieht Konrad Zuse in der Annahme endlich vieler ausgezeichnete Koordinatensysteme. Jedoch muss sich hierfür „eine Beziehung zwischen Lichtgeschwindigkeit und Übertragungsgeschwindigkeit ergeben“, wobei die Übertragungsgeschwindigkeit von Zelle zu Zelle allgemein größer sein muss, als die Signalgeschwindigkeit und je näher sich beide kommen, desto kritischer wird die digitale Simulation, was bei energiereichen Teilchen zu Vorgängen führt, die man als „sich Verrechnen“ des Rechnenden Raumes bezeichnen kann.

Ausblick

Bisher wurden zur Veranschaulichung recht einfache Beispiele für die Strukturierung des Rechnenden Raumes und der Digitalteilchen im ein-, zwei- und sogar dreidimensionalen euklidischen Raum vorgestellt. Aber selbst in diesen Raumdimensionen sind noch nicht alle Eigenschaften erforscht – erst recht nicht in der dritten Dimension. Es lassen sich sicher noch weitere, als die von Konrad Zuse angeführten Wechselwirkungen digitalisieren. Höher dimensionale Räume verleihen dem Digitalteilchen neue Symmetrien, für die sich möglicherweise physikalische Entsprechungen finden lassen. So tritt etwa die Eigenschaft der Chiralität erst in der dritten Dimension auf. Auch könnte es zweckmäßiger sein, sich von der euklidischen Gitterstruktur des Rechnenden Raumes völlig zu trennen und Gitter mit verallgemeinerter, eventuell veränderlicher, topologischer Nachbarschaftsstruktur der Automatenzellen zu betrachten, die dann komplexen Netzwerken ähneln. Durch die Digitalteilchen wurden neben dem Ort insbesondere der Impuls und seine Erhaltung berücksichtigt. Man könnte sich das Digitalteilchen auch in einem Rechnenden Orts-Impuls-Zustandsautomatenraum vorstellen, in dem jede Phasenraumzelle den Zustand (ob vorhanden und mit welchem Impuls) repräsentiert und auf die ebenfalls bestimmte Schaltgesetze wirken. Eine Bewegung lässt sich in diesem Zuse-Raum als Zustandstransformation beschreiben. Hierbei stellt sich jedoch die Frage nach der

Eindeutigkeit der Zuordnung, weil ein Digitalteilchen ohne Kenntnis des Phasenzustandes mehrere Zellen besetzen kann. Eine variable Skalierung der Zellengröße, die von der Elementarzelle zu Makrozellen reicht, könnte die Beschreibung über mehrere Ordnungen ermöglichen, wobei die Transformationsregeln ebenfalls eine Anpassung beinhalten müssten.

Interessant wäre es, den Gedanken der zwei eng benachbarten Parallelgitter wie beim Läuferbeispiel auf noch mehr Gitter zu erweitern, die somit Welten voneinander unabhängiger Digitalteilchen beschreiben. Die Gitter könnten auch unterschiedliche Einheiten besitzen, deren Größenordnung durch die Wellenlängen bzw. Energien der realen Teilchen bestimmt wird. Die dominierende Schaltzeit wird durch das Gitter mit der kleinsten Einheit vorgegeben. Zudem stellt sich die Frage, welche Zusatzbedingungen an die Schaltgesetze gestellt werden müssen, so dass eine Wechselwirkung zwischen den Digitalteilchen der verschiedenen Welten eintritt und dadurch eventuell neuartige Digitalteilchen entstehen, die sich möglicherweise auf einem anderen Gitter bewegen könnten. Die Aktivierung der Regeln hängt von den Gittertypen und den darauf existierenden Digitalteilchen ab.

Die Ableitung der Schaltgesetze ist eine grundlegende Aufgabe, die noch weitgehend ungelöst ist. Bisher wurde bei der Simulation der physikalischen Gesetze insbesondere die freie Bewegung der Teilchen und über den Impulserhaltungssatz der Stoß berücksichtigt. Bei den reaktiven Wechselwirkungen sind dann solche vorzuziehen, die der Regel der Informationserhaltung gehorchen. Allgemeiner stellt sich die Frage, ob es physikalisch motivierte Forderungen wie das Prinzip der kleinsten Wirkung analog für die Digitalteilchen gibt. Über die Variation aller möglichen Zustandsmuster müssten sich dann, als Optimierungsaufgabe über die Zeit, die zulässigen Zustandstransformationen ableiten lassen.

Literatur

- [1] Zuse, K.: Der Computer – Mein Lebenswerk. Springer-Verlag, 1993.
- [2] Zuse, K.: Rechnender Raum. 1967, S. 336–344. Unbekannte Quelle.
- [3] Zuse, K.: Rechnender Raum. Schriften zur Datenverarbeitung, Band 1, Friedr. Vieweg + Sohn, Braunschweig, 1969.
- [4] Zuse, K.: Cellular structured space (Rechnender Raum) and physical phenomena. Technical Report TR 93-12. Konrad-Zuse-Zentrum für Informationstechnik Berlin (ZIB), December 1993.
- [5] Zuse, K.: Discrete Mathematics and Rechnender Raum (Computing Space), Part 1. Cellular Structured Space (Rechnender Raum) and Physical Phenomena, Part 2. Technical Report TR 94-10. Konrad-Zuse-Zentrum für Informationstechnik Berlin (ZIB), April 1994.
- [7] Hardy, J.; Pomeau, Y., de Pazzis, O.: Time evolution of a two-dimensional model system. I. Invariant states and time correlation functions. J. Math. Phys. 14 (1973) 12, 1746–1759.
- [8] Frisch, U.; Hasslacher, B.; Pomeau, Y.: Lattice-Gas Automata for Navier-Stokes Equations. Phys. Rev. Lett. 56 (1986) 14, 1505–1508.
- [9] Lloyd, S.: Programming the universe. Vintage Books. New York, 2007.
- [11] Neumann, J. v.; Burks, A. W. (ed.): Theory of Self-Reproducing Automata. University of Illinois Press, 1966.
- [12] D. Gabor: Theory of Communication. J. IEE (London), 1946, November, Vol. 93, Part III, No. 26, Page 429–457

Programmbeispiel

```

% -----
% Zuse's Digitalteilchen, zweidimensional
% -----
% Programmiersprache: MATLAB, getestet mit MATLAB 7.5.0 (R2007b)
%
% Autor: Dr. Uwe Renner
%        Arnold-Sommerfeld-Gesellschaft e.V., 2009
%
% für "Konrad-Zuse-Symposium 2009 - 40 Jahre Rechnender Raum"
% Beispiele stammen aus dem Buch von Konrad Zuse: Rechnender Raum.
% Vieweg, 1969
%
clear all;

bAvi = 0; %1: mit Avi-Video

aviobj = [];
if(1 == bAvi)
    aviobj = avifile('demo.avi', 'compression', 'rle', 'fps', 10);
end

Zeitschritte = 103; % Anzahl darzustellender Zeitschritte
N = 40;

NZustM = 4; % Anzahl der Monopod-Zustände
NZustB = 4; % Anzahl der Bipod-Zustände

%Definition der Nachbarschaft
%c = 1:N; % Zentrum
s = [2:N 1]; % Süden
n = [N 1:N-1]; % Norden
e = [2:N 1]; % Osten
w = [N 1:N-1]; % Westen

% Monopods (nur die Pfeilspitzen dargestellt)
% 0: > (gehe nach Osten)
% 1: ^ (gehe nach Norden)
% 2: < (gehe nach Westen)
% 3: v (gehe nach Süden)
% NZustM*l + k + 1, k: Klasse (0...(NZustM-1)), l: ordnung, 0: leer
M = zeros(N, N, 'uint8');
M1 = false(N, N); M2 = false(N, N); M3 = false(N, N); M4 = false(N, N);

% Bipods (nur die Pfeilspitzen dargestellt)
% 0: ^>
% 1: <^
% 2: <v
% 3: v>
% NZustB*l + k + 1, k: Klasse (0...(NZustB-1)), l: Ordnung, 0: leer
B = zeros(N, N, 'uint8');
B1 = false(N, N); B2 = false(N, N); B3 = false(N, N); B4 = false(N, N);

Nh = floor(N / 2);

% Anfangskonfigurationen
%
% Bild 43: Bipod
%B(Nh, Nh) = 1 + 3;
%
% Bild 44: Blinker, Nest
%B(Nh, Nh) = 1 + 3; B(Nh + 1, Nh + 1) = 1 + 1;
%
% Bild 45: Nest
%B(Nh, Nh) = 1 + 3; B(Nh + 1, Nh + 1) = 1 + 1;
%B(Nh + 1, Nh) = 1 + 0; B(Nh, Nh + 1) = 1 + 2;
%
% Bild 46: reaktive Kollision zweier Monopods zu einem Bipod
%M(Nh, Nh - 10) = 1 + 0; M(Nh - 10, Nh) = 1 + 3;
%
% Bild 52: reaktive Kollision zweier Bipods zu einem Monopod
%B(Nh - 10, Nh - 10) = 1 + 3; B(Nh - 10, Nh + 10) = 1 + 2;
%
% Bild 53: reaktionsfreie Kollision, Kreuzung zweier Bipods
%B(Nh - 10, Nh - 10) = 1 + 3; B(Nh - 10, Nh + 9) = 1 + 2;
%
% Bild 59: Bipod mit unterschiedlich langen Beinen
M(Nh,Nh) = 1 + 8 + 0; B(Nh,Nh) = 1 + 4 + 3; % k = 3, l = 0

```

```

hfig = figure(1); clf(hfig);
set(hfig, 'DoubleBuffer', 'on', 'MenuBar', 'none', 'NumberTitle', 'off');
set(hfig, 'Name', 'Rechnender Raum und Digitalteilchen', 'Units', 'normalized');
ax = axes('Parent', hfig);

pos = get(ax, 'Position');
set(hfig, 'Position', [(1 - pos(3))/2, (1 - pos(4))/2, pos(3), pos(4)]);

cmap = zeros(5,3);
cmap(2,:) = [1, 1, 1]; % Bipod
cmap(3,:) = [1, 0, 0]; % Monopod
cmap(4,:) = [0, 1, 0]; % zusammengesetzt
cmap(5,:) = [0, 0, 1];
colormap(cmap);

if(~isempty(avioobj))
    avioobj = set(avioobj, 'colormap', cmap);
end

CData = uint8(B > 0) + 2 * uint8(M > 0); % Farbkodierung

hImage = image(CData, 'parent', ax);
axis(ax, 'off');
axis(ax, 'image')

drawnow;

Q = ones(10, 10, 'uint8'); % benötigt zur Pixelentwicklung im Kroneckerprodukt

% aktualisiere Video
if(~isempty(avioobj))
    F = im2frame(kron(CData, Q), cmap);
    avioobj = addframe(avioobj, F);
end

for i=1:Zeitschritte
    % Komposition aus Monopods und Bipods

    % Monopods
    Id = (M == 0);
    k = mod(M - 1, NZustM);
    k(Id) = NZustM;
    l = 1 + int8((M - 1 - k) / NZustM);
    l(Id) = 0;

    % Entwicklung in X, Y
    dXI = int8(k(:,w) == 0) .* l(:,w) - int8(k(:,e) == 2) .* l(:,e);
    dYI = int8(k(s,:) == 1) .* l(s,:) - int8(k(n,:) == 3) .* l(n,:);

    % Bipods
    Id = (B == 0);
    k = mod(B - 1, NZustB);
    k(Id) = NZustB;
    l = 1 + int8((B - 1 - k) / NZustB);
    l(Id) = 0;

    % Entwicklung in X, Y mit Zuse-Regeln für Bipods
    dXB = (int8(k(s,:) == 0) - int8(k(s,:) == 1)) .* l(s,:) + ...
           (int8(k(n,:) == 3) - int8(k(n,:) == 2)) .* l(n,:);
    dYB = (int8(k(:,w) == 0) - int8(k(:,w) == 3)) .* l(:,w) + ...
           (int8(k(:,e) == 1) - int8(k(:,e) == 2)) .* l(:,e);

    dX = dXI + dXB;
    dY = dYI + dYB;

    % Normalisierung der Digitalteilchen in M, B

    % Kodierung der Bipods
    LB = min(abs(dX), abs(dY));

    B1 = (dX > 0) & (dY > 0);
    B2 = (dX < 0) & (dY > 0);
    B3 = (dX < 0) & (dY < 0);
    B4 = (dX > 0) & (dY < 0);

    B = 4*uint8(LB) - (4*uint8(B1) + 3*uint8(B2) + 2*uint8(B3) + uint8(B4));
    B = B + uint8(B1 | B2 | B3 | B4);

```

```

% Subtraktion Bipod
dX = dX - LB .* (int8(B1 | B4) - int8(B2 | B3));
dY = dY - LB .* (int8(B1 | B2) - int8(B3 | B4));

% Kodierung Monopods
M1 = (dX > 0) & (dY == 0);
M2 = (dX == 0) & (dY > 0);
M3 = (dX < 0) & (dY == 0);
M4 = (dX == 0) & (dY < 0);

R = (int8(M1) - int8(M3)) .* dX + (int8(M2) - int8(M4)) .* dY;

M = 4*uint8(R) - (4*uint8(M1) + 3*uint8(M2) + 2*uint8(M3) + uint8(M4));
M = M + uint8(M1 | M2 | M3 | M4);

% Aktualisierung für Bild
CData = uint8(B > 0) + 2 * uint8(M > 0); % Farbkodierung
set(hImage, 'CData', CData);
drawnow;

% optionale Aktualisierung für Video
if(~isempty(aviobj))
    F = im2frame(kron(CData, Q), cmap);
    aviobj = addframe(aviobj, F);
end

end

if(~isempty(aviobj))
    aviobj = close(aviobj);
end
end

```