

B Ausgewählte Lehrbuchdarstellungen zum Pendel und Doppelpendel

Wolfgang Eisenberg*

Zum Studium der Darstellungen des mathematischen Pendels wurden die Lehrbücher zur Mechanik von zwei bekannten Lehrbuchautoren, von ARNOLD SOMMERFELD und LEW LANDAU, ausgewählt. Die anfangs zufällig motivierte Auswahl erwies sich im weiteren Verlauf der Recherchen als tragend. Eine umfassende Analyse der Lehrbuchdarstellungen zu diesem Thema kann sie allerdings nicht ersetzen.

Die Lehrbücher beider Gelehrter wurden mehrfach aufgelegt und repräsentieren zwei nicht nur historisch geprägte Richtungen in der theoretischen Physik. Sie kennzeichnen einen Wendepunkt – mehr eine Verzweigung – in der Physikentwicklung.¹

Der Altmeister der Quantentheorie, ARNOLD SOMMERFELD, wollte in seiner Mechanik *„möglichst viel auf die Anschauung zurückgreifen und nicht nur die astronomischen, sondern auch die physikalischen und bis zu einem gewissen Grade auch die technischen Anwendungen“* einbeziehen [1]. Für ihn war die Mechanik das Rückgrat der mathematischen Physik, weil *„die Prinzipien*

*Gesellschaft für ökologische Technologie und Systemanalyse e.V.,
Ostheimstr. 3a, D-04328 Leipzig

¹Ursprünglich war diese Themenwahl durch die eigenen historischen Studien zur WEBSERSchen Pendeltheorie des Gehens motiviert. Als Auslöser für die konkreter beschriebene Auswahl der didaktischen Umsetzung zur Thematik „Mehrfachpendel“ erwiesen sich dann das Leipziger Kolloquium zum 125. Geburtstag des erfolgreichen „Didaktikers“ der Physik ARNOLD SOMMERFELD und die Analyse der Beiträge des HEISENBERG-Verehrers LEW LANDAU zur Theorie mehratomiger Moleküle im Leipziger „Synergetik-Seminar“. Daran knüpfen auch die eigenen Forschungen zum Mehrfachpendel an.

der Mechanik – der Satz von Impuls und Energie, das Prinzip der kleinsten Wirkung – in alle Gebieten der Physik hinübergreifen“ [2].

Die Pendelbewegung beschreibt A. SOMMERFELD hauptsächlich in den Kapiteln „Schwingungsprobleme“ und „Die Integralprinzipien der Mechanik und die allgemeinen Lagrangeschen Gleichungen“. Sie enthalten ausführliche Ableitungen.

LANDAU hingegen begann erst 1924 in der physikalischen Abteilung und wandte sich in dieser Zeit erstmalig der „echten theoretischen Physik“ zu, als diese gerade ihre Sturm-und-Drang-Periode erlebte (1925 entdeckte W. HEISENBERG die neue Quantenmechanik). Die Arbeiten von HEISENBERG und SCHRÖDINGER versetzten ihn regelrecht in Ekstase. Für ihn war es ein gewaltiger Triumph, „daß der Mensch fähig ist, Dinge zu verstehen, die er sich nicht veranschaulichen kann. Und natürlich gehören gerade die Krümmung der Raum-Zeit und das Unbestimmtheitsprinzip dazu“ [3].

LANDAUS wissenschaftlicher Stil, Klarheit und Schärfe der physikalischen Fragestellung zu erreichen und den schnellsten und elegantesten Weg zur Lösung zu finden, prägte auch sein Lehrbuch der Theoretischen Physik. Deshalb findet man in seiner Mechanik neben dem LAGRANGE- verstärkt den HAMILTON-Formalismus und weniger ausführliche Ableitungen und Rechnungen. LANDAU befaßte sich aber auch mit Plänen „Bücher über die Physik auf allen Niveaus zu schreiben, vom Schulbuch bis zum Kurs der theoretischen Physik für Spezialisten“ [4]. Seine geplanten Lehrbücher der Mathematik für Physiker sollten praktisch und frei von überflüssiger Strenge und Kompliziertheit sein. Zur Ausführung dieses Programms kam LANDAU nicht mehr, so daß wir nur seine *Mechanik* analysieren können. In seiner *Mechanik* sind die Pendelbewegungen in den Abschnitten „Bewegungsgleichungen“ und „Kleine Schwingungen“ behandelt worden. Die Pendelbewegung ist auch für SOMMERFELD kein geeignetes Beispiel zur Demonstration des HAMILTON-Formalismus.

B.1 Die Pendelbewegung in SOMMERFELDS Mechanik

B.1.1 Das mathematische Pendel

Wie üblich beginnt auch SOMMERFELD mit der Darstellung des mathematischen Pendels. Die exakte Gleichung für dieses schwere Pendel lautet für den Winkel ϕ :

$$ml\ddot{\phi} = -mg \sin \phi. \quad (\text{B.1})$$

Die Pendelgleichung läßt sich bekanntlich für kleine Schwingungen ($\phi \ll 1$) leicht lösen ($\sin \phi \approx \phi$):

$$\phi = A \sin \omega t \quad \text{mit} \quad \omega^2 = g/l. \quad (\text{B.2})$$

Dabei verhalten sich die kleinen Pendelschwingungen isochron.

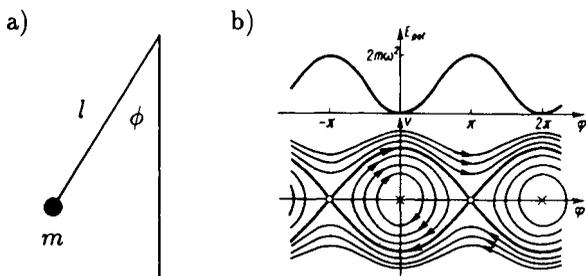


Abb. B.1: Modell und Energiekurve/Phasenportrait des mathematischen Pendels

Zur Lösung der exakten Gleichung benutzt SOMMERFELD den Übergang zur Energiegleichung:

$$\dot{\phi}^2 - 2\omega^2 \cos \phi = E = -2\omega^2 \cos A. \quad (\text{B.3})$$

Als Schwingungsdauer T ergibt sich hieraus:

$$T = 4\omega K \quad \text{mit} \quad K = \int_0^{\pi/2} \frac{dv}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 v}}. \quad (\text{B.4})$$

Die Abweichung vom Isochronismus bei endlichen Ausschlägen A zeigt die folgende Formel an:

$$T = 2\pi\omega \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{A}{2} + \frac{9}{64} \sin^4 \frac{A}{2} + \dots \right). \quad (\text{B.5})$$

Mit dieser Darstellung des einfachen und idealisierten Pendels beginnt SOMMERFELD seine Lehrbuchdarstellungen zur Pendelbewegung, die er bis zur technischen Nutzung weiter ausführt. So erwähnt er z.B. auch die Anwendungen in der Astronomie; die astronomischen Uhren haben einfach gebaute Pendel mit $A \leq 1,5^\circ$. Das erste Korrekturglied errechnet sich zu $1/20000 = 0,00005$. Für $A = 10^\circ$ ergibt sich als erstes Korrekturglied $0,002$. Wenn $A = 25^\circ$ ist, erhält man als erstes Korrekturglied $0,026$ und als zweites Korrekturglied $0,00055$. Selbst diese Angaben sind im Lehrbuch.

B.1.2 Das physikalische Pendel

Eine Aufhebung der Idealisierung des mathematischen Pendels führt zum physikalischen Pendel. Die Bewegungsgleichung lautet analog:

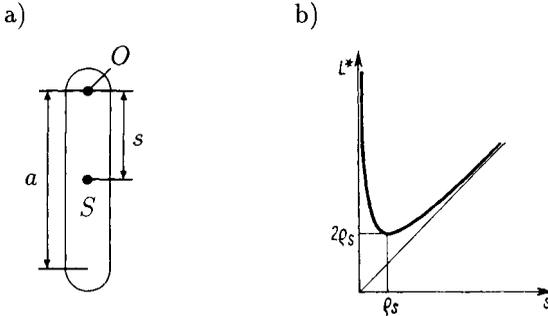


Abb. B.2: Modell und reduzierte Pendellänge des physikalischen Pendels (S: Schwerpunkt, O: Unterstützungspunkt)

$$\Theta \ddot{\phi} = -mg \sin \phi. \tag{B.6}$$

Der Vergleich mit der exakten Pendelgleichung (B.1) liefert als Länge l_k des korrespondierenden mathematischen Pendels, d. h. des genannten Pendels mit der gleichen Schwingungsdauer T :

$$l^* = l_k = \Theta / ms. \tag{B.7}$$

Zum Trägheitsmoment Θ läßt sich ein „Trägheitsarm“ a definieren:

$$\Theta = ma^2. \tag{B.8}$$

Dieser Lehrbuchabschnitt enthält die typischen Unterschiede zwischen mathematischen und physikalischen Modellen (Aufhebung von Idealisierungen) und die möglichen analogen Begriffe (Korrespondenzen) der Modelle.

B.1.3 Das ebene Doppelpendel

Von den Mehrfachpendeln analysiert SOMMERFELD nur das Doppelpendel. Vorausgesetzt werden vereinfachte Verhältnisse: $\mu = m_2/m_1 \ll 1$. Verknüpft

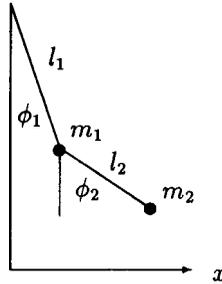


Abb. B.3: Doppelpendel

sind also ein schweres und ein leichtes Pendel mit annähernd gleichen Pendellängen l_1 und l_2 . Für kleine Ausschläge (Winkel $\phi_1, \phi_2 \ll 1$) erhält man die Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= -m_1 \frac{g}{l_1} x_1 + m_2 g \left(\frac{x_2 - x_1}{l_2} - \frac{x_1}{l_1} \right) \\ m_2 \ddot{x}_2 &= -m_2 \frac{g}{l_2} (x_2 - x_1). \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Für $l_1 = l_2$ ergibt sich daraus:

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2(1 + 2\mu)x_1 = \mu\omega_0^2 x_2 \quad \ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 = \omega_0^2 x_1 \quad (\text{B.10})$$

mit $\omega_0^2 = g/h$. Das obere Pendel ist „ μ -mal so lose“ an das untere Pendel gekoppelt wie umgekehrt.

Mit den Ansätzen $x_2 = Be^{i\pi t}$ und $x_1 = Ae^{i\pi t}$ erhält man bei Vernachlässigung höherer Potenzen von μ :

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{C}{\gamma - \gamma'} \left(\frac{\sin \omega t}{\omega} - \frac{\sin \omega' t}{\omega'} \right) \quad \text{und} \\ x_1 &= \frac{C}{\gamma - \gamma'} \left(\frac{\gamma}{\omega} \sin \omega t - \frac{\gamma'}{\omega'} \sin \omega' t \right) \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

mit $\gamma = -\sqrt{\mu}$, $\gamma' = +\sqrt{\mu}$, $\omega = \omega_0(1 + \frac{1}{2}\sqrt{\mu})$ und $\omega' = \omega_0(1 - \frac{1}{2}\sqrt{\mu})$.

Die Geschwindigkeiten des schweren oberen Pendels sind also bei entsprechender Phase $\sqrt{\mu}$ -mal kleiner als die des leichten unteren Pendels:

$$\dot{x}_2 = \frac{c}{2\sqrt{\mu}}(\cos \omega' t - \cos \omega t) \quad \text{und} \quad \dot{x}_1 = \frac{c}{2}(\cos \omega' t + \cos \omega t). \quad (\text{B.12})$$

Wegen der benachbarten Werte von ω und ω' haben die Ausschwingungen Schwebungscharakter.

Die exakten Bewegungsgleichungen des Doppelpendels hat SOMMERFELD mit Hilfe der LAGRANGESchen Gleichungen 2. Art abgeleitet. Die LAGRANGE-Funktion lautet in diesem Fall:

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2} l_1^2 \dot{\phi}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 \dot{\phi}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 \quad (\text{B.13})$$

$$+ (m_1 + m_2) g l_1 \cos \phi_1 + m_2 g l_2 \cos \phi_2.$$

Die Gleichung (B.9) erhält man als Näherung für kleine Winkel ($\phi_1, \phi_2 \ll 1$), wenn man noch annimmt, daß auch $\dot{\phi}_1$ und $\dot{\phi}_2$ Größen derselben Kleinheit wie ϕ_1 und ϕ_2 sind, und ϕ_1 durch $\frac{x_1}{l_1}$ und ϕ_2 durch $\frac{x_2 - x_1}{l_2}$ ersetzt.

Das Doppelpendel beschreibt SOMMERFELD also im nicht nur historisch erfolgreichen LAGRANGE-Formalismus.

B.2 Die Pendelbewegung in LANDAUS Mechanik

B.2.1 Ebenes Pendel

LANDAUS Lehrbuch der Mechanik enthält schon ein Pendel mit beweglichem Aufhängepunkt. Für ein ebenes Pendel mit der Masse m_2 , dessen Aufhänge-

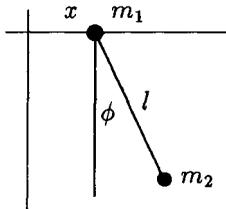


Abb. B.4: Ebenes Pendel mit horizontal beweglichem Aufhängepunkt

punkt (Masse m_1) sich entlang einer horizontalen Geraden bewegen kann, lautet die LAGRANGE-Funktion:

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{x}^2 + \frac{m_2}{2} \left(l^2 \dot{\phi}^2 + 2l\dot{x}\dot{\phi} \cos \phi \right) + m_2 g l \cos \phi. \quad (\text{B.14})$$

Sie ist in LANDAUS *Mechanik* enthalten. In diesem Fall sind die Bewegungsgleichungen und die Meßgrößen ω und T abgeleitet worden. Für kleine Winkel ϕ und kleine Geschwindigkeiten \dot{x} und $\dot{\phi}$ haben sie folgende Gestalt:

$$(m_1 + m_2)\ddot{x} + m_2 l \ddot{\phi} = 0 \quad (\text{B.15})$$

$$l \ddot{\phi} + \ddot{x} + g \phi = 0 \quad \text{mit} \quad \omega^2 = \frac{g}{l} \left(1 + \frac{m_2}{m_1} \right) \quad \text{und} \quad \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

B.2.2 Das ebene Doppelpendel

LANDAU berechnet wie üblich die kleinen Schwingungen des ebenen Doppelpendels. Die Bewegungsgleichungen lauten für diesen Fall:

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2)l_1\ddot{\phi}_1 + m_2l_2\ddot{\phi}_2 + (m_1 + m_2)g\phi_1 &= 0 \\ l_1\ddot{\phi}_1 + l_2\ddot{\phi}_2 + g\phi_2 &= 0. \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

Mit dem Ansatz $x_k = A_k e^{i\omega t}$ erhält man als charakteristisches Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} A_1(m_1 + m_2)(g - l_1\omega^2) - A_2\omega^2 m_2 l_2 &= 0 \\ -A_1 l_1 \omega^2 + A_2(g - l_2\omega^2) &= 0. \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

Die zugehörigen Wurzeln heißen:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{m_1 + m_2}{m_1} \frac{g}{2l_1 l_2} \left[l_1 + l_2 \pm \sqrt{(l_1 + l_2)^2 - 4 \frac{m_1}{m_1 + m_2} l_1 l_2} \right].$$

Für $m_1 \rightarrow \infty$ streben ω_1 und ω_2 den Grenzwerten $\sqrt{g/l_1}$ und $\sqrt{g/l_2}$ (zwei unabhängige Pendel) zu. Es fehlen Versuche zur Behandlung großer Ausschläge des Doppelpendels. Das Dreifachpendel ist sowohl bei SOMMERFELD als auch bei LANDAU noch nicht zu finden.

B.2.3 Beispiele der Pendelbewegung in den Lehrbüchern von SOMMERFELD und LANDAU

Zum Abschluß sei hier eine Liste der von SOMMERFELD und LANDAU behandelten Modelle zur Pendelbewegung angegeben (siehe Tab. B.1 und Tab. B.2). Der Überblick der behandelten Beispiele der Pendelbewegung offenbart eine ähnliche Beispielstruktur mit historischen, zweck- und stilbedingten Spezifika. Nur das mathematische Pendel ist vollständig behandelt worden.

In beiden Fällen fehlen das Dreifachpendel und die nichtlinearen Anteile in der Beschreibung der Mehrfachpendel.

Insofern repräsentieren diese Lehrbuchdarstellungen die Physikentwicklung, denn die nichtlineare Dynamik erzielte Ende der 80er Jahre (siehe z. B. [5]) ihren bedeutenden Aufschwung.

I.	Ebenes Pendel	
I.1	Mathematisches Pendel. Homogenes Schwerfeld.	
	Exakte Lösung	(S. 29)
I.2	Ebenes Pendel, dessen Aufhängepunkt sich bewegt	(S. 13/14)
	a) horizontal geradlinig ($v = \text{const.}$)	(S. 13/14)
	b) horizontal schwingend ($\cos \omega t$; $\omega = \text{const.}$)	(S. 13/14)
	c) vertikal schwingend ($\cos \omega t$; $\omega = \text{const.}$)	(S. 109)
	d) auf Kreisbahn ($\omega = \text{const.}$)	(S. 13/14)
	e) auf Zykloide (T ist unabhängig von der Amplitude)	(S. 69/70)
I.3	Ebenes Pendel mit parametrischer Resonanz	(S. 98)
I.4	Physikalisches Pendel. Kleine Schwingungen	(S. 119)
II.	Ebenes Doppelpendel	
II.1	Ebenes Doppelpendel. Homogenes Schwerfeld	(S. 12)
II.2	Ebenes Doppelpendel. Kleine Schwingungen	(S. 81)
III.	Sphärisches Pendel	(S. 38)

Tab. B.1: Beispiele der Pendelbewegung bei L. LANDAU [6]

I.	Ebenes Pendel	
I.1	Mathematisches Pendel. Homogenes Schwerfeld.	
	Exakte Lösung	(S. 83)
I.2	Physikalisches Pendel.	
	Korrespondierendes mathematisches Pendel	(S. 86/87)
I.3	Reversionspendel	(S. 87)
I.4	Zykloidenpendel	(S. 184)
I.5	BESSELSches Pendel	(S. 92)
I.6	FOUCAULTSches Pendel	(S. 164)
II.	Ebenes Doppelpendel	(S. 92)
II.1	Ebenes Doppelpendel. Kleine Schwingungen	(S. 107/186/187)
II.2	Sympathisches Pendel	(S. 107)
III.	Sphärisches Pendel	(S. 185)

Tab. B.2: Beispiele der Pendelbewegung bei A. SOMMERFELD [1]

Das Thema Schwingungen mehratomiger Moleküle hingegen ist nicht auf zweiatomige Moleküle beschränkt. So enthält LANDAUS Quantenmechanik² [7] ein Kapitel „Mehratomige Moleküle“ neben dem Kapitel „Das zweiatomige Molekül“ [8].

In dem Kapitel über Molekülschwingungen zweiatomiger Moleküle bedient sich LANDAU noch der quasiklassischen Methode, der BOHR-SOMMERFELD-schen Methode, um die Ergebnisse der Mechanik effektiv einbauen zu können. Eine quantenmechanische Behandlung eines Mehrfachpendels fehlt explizit – vielleicht aus didaktischen Gründen.

²Motiviert wurde diese Thematik durch eine Diskussion im Synergetik-Seminar im Leipziger Wissenschaftszentrum im April des Jahres 1994

B.2.4 Molekülschwingungen mehratomiger Moleküle und Stöße 2. Art im Prozeß der Prädissociation

LANDAUS Darstellung des zweiatomigen Moleküls basiert auf der Annahme, daß die Molekülwellenfunktion als Produkt der Elektronen- und der Kernteilchenwellenfunktion darstellbar ist. Dabei wird die Elektron-Kern-Wechselwirkung vernachlässigt.

Mittels der Störungstheorie kann man dann die Übergänge zwischen verschiedenen Elektronenzuständen berechnen. Physikalisch wichtig sind beson-

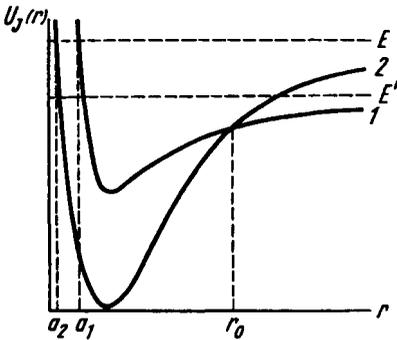


Abb. B.5: Kurven der potentiellen Energie für zwei Elektronenterme und Prädissociation (Spontanzerfall)

ders die Übergänge, bei denen mindestens ein Zustand zum kontinuierlichen Spektrum gehört. Wenn die Gesamtenergie E höher als die Dissoziationsgrenze in beiden Zuständen (1,2) ist, dann entspricht der Übergang $1 \rightarrow 2$ einem Stoß zweiter Art, und eine Prädissociation (spontaner Zerfall des Moleküls) ist möglich. Die Atome gehen in angeregte Zustände über und entfernen sich mit verringerter kinetischer Energie. Wegen der großen Kernmassen ist ihre Bewegung quasiklassisch, und die bestimmende Rolle für die Übergangswahrscheinlichkeit wird der Punkt spielen, in dem der Übergang auf klassische Weise behandelt werden kann. Die Übergänge finden nur dann mit merklicher Wahrscheinlichkeit statt, wenn sich die Kurven der potentiellen Energie im klassisch erreichbaren Gebiet durchkreuzen. Im Verlauf des Elektronenübergangs ändern die Kerne ihre Lage und Geschwindigkeiten nicht merklich, wohingegen die Elektronengeschwindigkeiten sehr groß sind.

Im Moment des Übergangs bleiben der gegenseitige Abstand und der Impuls der Kerne unverändert (FRANCK-CONDON-Prinzip). Damit ist die Klassifikation der Elektronenterme nach den Gleichgewichtslagen der Kerne und deren Symmetrien sinnvoll. Diese Klassifikation behält auch noch bei kleinen Schwingungen der Kerne ihren Sinn. Zudem gilt für die normalen Elektronenterme

mehratomiger Moleküle eine empirische Regel, wonach bei der Mehrzahl der Moleküle die Wellenfunktionen des normalen Elektronenzustandes volle Symmetrie besitzen. Der quantenmechanischen Untersuchung kann man demnach „die rein klassische Betrachtung der Schwingungen eines Moleküls als eines Systems mehrerer wechselwirkender Teilchen (Kerne) vorausschicken“ [9]. Somit dürfen die Stöße zweiter Art wesentlich klassisch beschrieben werden.

Die Übergänge von stabilen zu instabilen Zuständen überschreiten offensichtlich die Grenzen der Theorie kleiner Schwingungen und markieren den Übergang zur Behandlung sehr großer Schwingungen zweiatomiger Moleküle. Ähnliche Analysen der dreiatomigen Moleküle und die volle nichtlineare Theorie der Molekülschwingungen fehlen. Nichtlinearitäten und chaotische Zustände der Mehrkörpersysteme waren noch kein Schwerpunkt von Forschung und Lehre in der Physik.

Literaturverzeichnis

- [1] Sommerfeld, A.: *Vorlesungen über Theoretische Physik*. Bd. I. *Mechanik*. Leipzig: Akadem. Verlagsgesellschaft, 1948. – S. 1
- [2] Ebenda, S. 2
- [3] Landau, L. D.; Lifschitz, E. M.: *Lehrbuch der Theoretischen Physik*. Bd. I. *Mechanik*. Berlin: Akademie-Verlag, 1987. – S. 207
- [4] Ebenda, S. 210
- [5] Kuypers, F.: *Klassische Mechanik*. 4. Aufl. Weinheim: VCH, 1993
- [6] Landau, L. D.; Lifschitz, E. M.: *Lehrbuch der Theoretischen Physik*. Bd. I. *Mechanik*. Berlin: Akademie-Verlag, 1964
- [7] Landau, L. D.: *Lehrbuch der Theoretischen Physik*. Bd. III. *Quantenmechanik*. Berlin: Akademie-Verlag, 1966. – S. 385
- [8] Ebenda, S. 289
- [9] Ebenda, S. 325

Neuere Ausgaben der Lehrbücher sowohl von SOMMERFELD als auch von LANDAU sind im Verlag Harri Deutsch, Thun und Frankfurt am Main, erschienen; sie enthalten jedoch keine abweichenden Gesichtspunkte hinsichtlich der besprochenen Thematik.