

3 Transportprozesse in Fraktalen: Diffusion und Elektronentransport

Uwe Renner*, Günter Vojta**

Zusammenfassung

Es wird eine Einführung in die Physik der Transportprozesse in fraktalen Systemen gegeben. Als Grundlage dazu werden die Fraktalkonzeption vorgestellt und der Begriff der gebrochenzahligen Dimension erläutert; hierbei dient das SIERPIŃSKI-Netzwerk als Beispiel. Der normalen Diffusion wird die anomale Diffusion in Fraktalen gegenübergestellt. Die Wanderungsdimension d_w und die Spektraldimension \tilde{d} werden eingeführt und die neuen Wesenszüge der anomalen Diffusion diskutiert. Im Mittelpunkt der Darstellung des Elektronentransports steht die EINSTEIN-Relation für Fraktale. Die für die Fraktalphysik charakteristische Skalierungsmethode wird an zwei typischen Beispielen erörtert, nämlich der Ermittlung des Zusammenhangs zwischen d_w und \tilde{d} und der Herleitung der EINSTEIN-Relation für dynamische Dimensionen des Elektronentransports.

3.1 Die Fraktalkonzeption

Die Begriffe Fraktal, fraktales System und Multifraktal spielen seit einigen Jahren eine wachsende Rolle in der Beschreibung komplizierter physikalischer und anderer Systeme, darunter chaotischer Systeme. Unter einem Fraktal versteht man eine Punktmenge oder ein System mit einer gebrochenzahligen, d. h. räumlichen Dimension (genauer: Dimensionalität). Das Wort Fraktal ist ein

*Wissenschaftszentrum Leipzig – Förderverein e.V.,
Goldschmidtstraße 26, D-04103 Leipzig

**Institut für Theoretische Physik der Universität Leipzig,
Augustusplatz 10-11, D-04109 Leipzig

Kunstwort; es wurde von B. B. MANDELBROT erfunden, der als Begründer der Fraktalphysik gilt [1]. Der Wortstamm kommt vom lateinischen Verb *frangere* für brechen (Perfektpartizip *fractum*) und tritt z. B. in Wörtern wie Fraktion, Fraktur oder *fraction* (englisch für Zahlenbruch) auf.

Gewöhnliche Objekte erscheinen ein-, zwei- oder dreidimensional. In der Mathematik sind Punktmenge mit gebrochenezahliger Dimension mindestens seit der Begründung der Mengentheorie durch G. CANTOR vor hundert Jahren bekannt. Sie besitzen sehr merkwürdige Eigenschaften, wurden als mathematische Konstruktionen sogar von einigen Mathematikern (z. B. von H. POINCARÉ) abgelehnt und jedenfalls für irgendwelche Anwendungen etwa in der Physik als vollkommen unnütz angesehen. Heute bilden sie eine wichtige Grundlage für die Theorie räumlich ungeordneter bzw. nichtlinearer Systeme.

Ein möglicher anschaulicher Zugang zum Fraktalbegriff wird durch die Untersuchung der statischen Adsorptionsfähigkeit einer Festkörperoberfläche mit

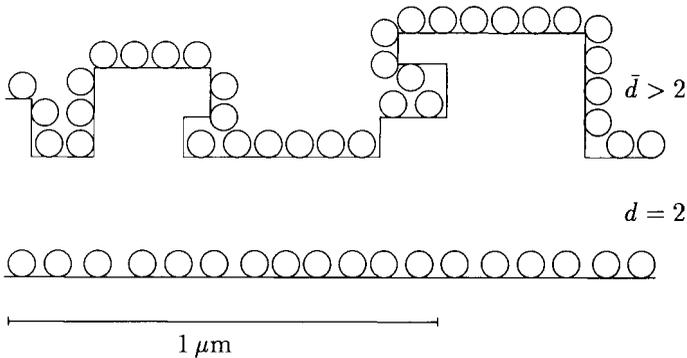


Abb. 3.1: Eine reale Festkörperoberfläche mit fraktaler Struktur zeigt eine größere Adsorptionsfähigkeit als eine ebene Oberfläche.

Realstruktur geliefert. Eine reale Oberfläche mit ihren Stufen, Buckeln und Höhlen kann (pro makroskopisch gemessener Flächeneinheit) mehr Atome adsorbieren als eine glatte, ebene Fläche der Dimension 2 (s. Abb. 3.1), und zwar um so mehr, je mehr Gitterfehler vorhanden sind. Mit wachsender Zahl der Stufen und Höhlen nähert sich die Adsorptionsfähigkeit der eines Schwammes, und dieser hat im idealen Grenzfall die Dimension 3. Es ist also sinnvoll, einer realen Oberfläche bezüglich ihrer Adsorptionsfähigkeit eine (effektive) Dimension \bar{d} zuzuschreiben, die der Ungleichung $2 < \bar{d} < 3$ genügt. Die Oberfläche wird damit zu einem Fraktal (siehe die Übersichtsarbeiten [2, 3] u. a.). Dieser

Sachverhalt ist von entscheidender Bedeutung z. B. für Katalysatoroberflächen in der chemischen Technologie.

Noch wichtiger und interessanter ist das dynamische Verhalten von Fraktalen, in denen sich beispielsweise Prozesse wie Diffusion, Elektronentransport oder chemische Reaktionen abspielen. Für eine Theorie der Fraktaldynamik sind weitere gebrochenezahlige Dimensionen nötig, deren Bedeutung über die geometrische Anschauung hinausgeht; dazu zählen insbesondere die Spektraldimension \tilde{d} und die Wanderungsdimension (englisch: *walk dimension*) d_w . Das widerspiegelt die Tatsache, daß z. B. Transportprozesse in Fraktalen neue komplizierte Gesetzmäßigkeiten im Vergleich zu gewöhnlichen („euklidischen“) Systemen aufweisen und geradezu eine neuartige Physik beinhalten. Dies ist der Gegenstand der vorliegenden einführenden Arbeit.

Zu den realen Fraktalen, die stets unregelmäßiger oder stochastischer Natur sind, gehören neben den Festkörperoberflächen

- unregelmäßige Porensysteme
- Perkolationslabyrinth
- verzweigte Polymere in verdünnter Lösung
- Kettenpolymere in Lösung und Schmelze
- Cluster mit kolloidalen Metallteilchen
- dendritische Aggregate, z. B. elektrolytische Metallabscheidungen
- Oberflächen von Enzymen, von Proteinen allgemein
- Immunoglobulin-Koagulate
- Blitze
- Wolkenformen

und viele andere.

Für eine quantitative Theorie ist es sinnvoll, ideale deterministische, also streng konstruierbare Fraktale einzuführen. Ein Musterbeispiel dafür ist das SIERPIŃSKI-Fraktal (SIERPIŃSKI-Netzwerk, -Gitter, -Dreieck, -Dichtung, englisch: *SIERPIŃSKI gasket*) [1, 4], dessen Konstruktion in Abb. 3.2 angedeutet ist. Mit wachsender Zahl n der Konstruktionsschritte wird die Struktur feiner und feiner, aber nach wie vor liegt eine Fläche mit Löchern vor, also ein Objekt der geometrischen Dimension $d = 2$; erst im Grenzübergang $\lim_{n \rightarrow \infty}$ entsteht ein Fraktal der Dimension $\tilde{d} = \ln 3 / \ln 2 = 1,5849 \dots$ Für Fraktale dieses Typs sind schon die verschiedenartigsten physikalischen Probleme durchgerechnet und z. T. experimentell verifiziert worden, z. B. Streuprobleme, Phasenumwandlungen, Spinsysteme und Transportprozesse, s. etwa [5, 6, 7]. Das ideale

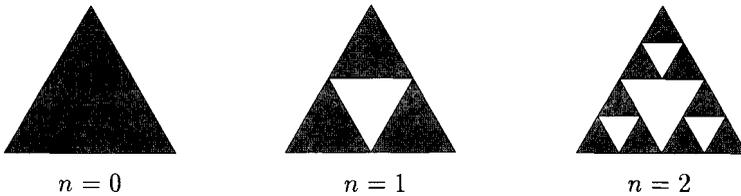


Abb. 3.2: Konstruktion eines einfachen SIERPIŃSKI-Fraktals, n : Zahl der Konstruktionsschritte. Gezeichnet sind Prä-Fraktale; das eigentliche Fraktal erhält man für den Grenzfall $n \rightarrow \infty$.

Fraktal ist durch zwei miteinander verkoppelte charakteristische Eigenschaften ausgezeichnet:

1. Selbstähnlichkeit in allen Längenskalen oder Dilatationsinvarianz (Strukturinvarianz gegenüber der Dilatationsgruppe), d. h. Vorliegen einer hierarchischen Struktur;
2. Fehlen einer charakteristischen Länge (in der Physik sind wichtige charakteristische Längen Atomdurchmesser, Gitterkonstante, mittlere freie Weglänge, Korrelationslänge, Abklinglänge u. a.).

Unter Selbstähnlichkeit oder Skaleninvarianz versteht man die Tatsache, daß beim Betrachten eines idealen Fraktals mit einem Mikroskop alle Bildausschnitte mit wachsender Vergrößerung immer wieder die gleiche Struktur zeigen (wenn man nicht gerade ein Loch betrachtet). Bei einem realen Fraktal mit stochastischer Strukturierung spricht man dann von stochastischer Selbstähnlichkeit.

Da ein reales Fraktal in der Natur oder im Laboratorium nicht beliebig feine Strukturen aufweisen kann und andererseits eine endliche Größe besitzt – ideale Fraktale sind per Definition unendlich ausgedehnt –, führt man zur Modellierung realer fraktaler Systeme zwei Abschneidgrenzen ein, nämlich einen unteren Cut-off, z. B. die Gitterkonstante eines Festkörpers, und einen oberen Cut-off, z. B. die Längsausdehnung des untersuchten Systems. Es wird also ein reales System durch ein ideales Fraktal nur unvollkommen modelliert; tatsächlich sind aber alle Modelle physikalischer und anderer Systeme in der einen oder anderen Weise unvollkommen.

Die gebrochenzahlige räumliche Dimension \bar{d} (die fraktale Dimension, auch MANDELBROT-Dimension) wird durch die unvollkommene Raumfüllung eines Fraktals definiert. Dazu denkt man sich das betrachtete Objekt mit Masse

(etwa der Massendichte $\rho = 1$) belegt. Für ein gewöhnliches Objekt im euklidischen Raum der Dimension $d = 1, 2$ oder 3 , etwa eine Strecke, ein Quadrat oder einen Würfel der Kantenlänge L , und mit einer Gesamtmasse M gilt

$$M \sim L^d \quad (3.1)$$

(das Zeichen \sim bedeutet proportional; der Proportionalitätsfaktor spielt keine Rolle, allein der funktionale Zusammenhang von M mit L und d ist wesentlich). Für ein ideales Fraktal wird nun die Dimension \bar{d} durch die Beziehung

$$M \sim L^{\bar{d}} \quad (3.2)$$

definiert. Allgemein setzt man

$$\text{Extensive Eigenschaft} \sim \text{Länge}^{\text{Dimension}} \quad (3.3)$$

Genauer gesehen ist der Grenzübergang $\lim_{n \rightarrow \infty}$ in der Zahl n der Konstruktionsschritte zu beachten. Dazu kann man das SIERPIŃSKI-Dreieck als Beispiel auch gemäß Abb. 3.3 konstruieren. Man startet mit einem massiven Dreieck der Seitenlänge $L = L_0$ und der Masse $M = M_0$ als Initiator; nach dem Konstruktionsschritt Nr. n liegt dann ein durchbrochenes Dreieck (ein Prä-Fraktal) der Seitenlänge $L_n = 2^n L_0$ und der Masse $M_n = 3^n M_0$ vor. Aus (3.2) ergibt sich nunmehr

$$\begin{aligned} \bar{d} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln M_n}{\ln L_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(3^n M_0)}{\ln(2^n L_0)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 3^n + \ln M_0}{\ln 2^n + \ln L_0} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln 3}{n \ln 2} = \frac{\ln 3}{\ln 2} < 2; \end{aligned} \quad (3.4)$$

wegen der Selbstähnlichkeit ist hier und bei allen idealen Fraktalen die Dimension \bar{d} unabhängig von der Zahl n der Konstruktionsschritte. Die hier durch (3.2) definierte Dimension bezeichnet man auch als Kapazitätsdimension oder kurz Kapazität. Für stochastische Fraktale kann man zur Definition von \bar{d} den Mittelwert $\langle M \rangle$ der Masse, gemittelt über viele Proben, benutzen; dann gilt

$$\langle M \rangle \sim L^{\bar{d}} \quad (3.5)$$

Eine andere und genauere Definition der Dimension \bar{d} benutzt die vollständige Überdeckung des Fraktals mit Elementarkörpern; dies führt auf die HAUSDORFF-Dimension [1, 4], die mit der Kapazitätsdimension in praktisch allen für die Anwendungen interessanten Fällen übereinstimmt. – Ein Multifraktal ist, grob gesagt, ein Fraktal, in dem die fraktale Dimension selbst ortsabhängig ist [4]. Beispielsweise sind Kolloide und verschiedene Teilchenaggregate typische Multifraktale.

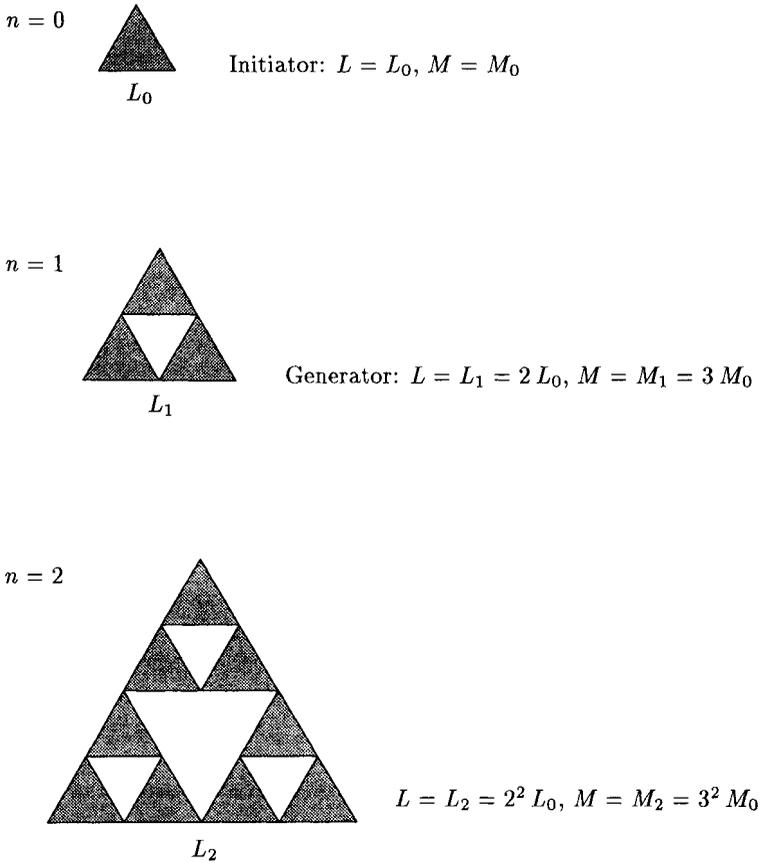


Abb. 3.3: Eine weitere Konstruktion des einfachen SIERPIŃSKI-Fraktals, n : Zahl der Konstruktionsschritte, L : Seitenlänge, M : Gesamtmasse.

3.2 Anomale Diffusion

Die Diffusion von Teilchen ist unter allen Transportprozessen der grundlegende und der wichtigste Prozeß. Wir betrachten zuerst die Diffusion infolge eines Konzentrationsgradienten in einem gewöhnlichen euklidischen System, die sogenannte normale Diffusion, wie sie in reiner Form in einem Gas oder einer Flüssigkeit, aber auch z. B. in einem Festkörper mit einfacher Kristallstruktur stattfindet.

Ausgangspunkt ist die Diffusionsgleichung in ihrer einfachsten Form

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\vec{r}, t) = D \Delta P(\vec{r}, t), \quad (3.6)$$

dies ist eine lineare partielle Differentialgleichung vom parabolischen Typ für einen Propagator $P(\vec{r}, t)$, D ist der Diffusionskoeffizient, und Δ stellt den LAPLACE-Operator mit

$$\Delta = \sum_{j=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \quad (3.7)$$

in d Dimensionen dar. Die Grundgröße

$$P(\vec{r}, t) \equiv P(\vec{r}, t | \vec{0}, 0)$$

ist die Wahrscheinlichkeitsdichte (bezüglich des Ortes), und zwar eine Übergangswahrscheinlichkeit (in physikalischer Sprache) oder eine bedingte Wahrscheinlichkeit (in der Sprache der Stochastik); ihre Bedeutung ist (für $d = 3$) durch $P(x, y, z, t | 0, 0, 0) dx dy dz$ gegeben als die Wahrscheinlichkeit, ein Teilchen im Intervall $x \dots x + dx, y \dots y + dy, z \dots z + dz$ zur Zeit t anzutreffen, wenn es sich zur Zeit $t = 0$ am Ort $x = 0, y = 0, z = 0$ befand.

Die sogenannte Fundamentallösung von (3.6), die zugleich auch die GREEN-Funktion von (3.6) bedeutet, ist durch die GAUSS-Verteilung (Normalverteilung)

$$P(\vec{r}, t) = \frac{1}{(\sqrt{4\pi D t})^d} \exp\left(-\frac{\vec{r}^2}{4 D t}\right) \quad (3.8)$$

gegeben, wie man leicht durch Einsetzen in (3.6) bestätigt. Sie ist einfach das Produkt von d GAUSS-Verteilungen in den d Richtungen eines kartesischen Koordinatensystems; für die x -Richtung etwa gilt

$$P(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4 D t}\right) \quad (3.9)$$

Dieser Sachverhalt bedeutet, daß die Diffusionsbewegungen der Teilchen in den drei Raumrichtungen unabhängig verlaufen und daß jeder Diffusionsprozeß in einer Dimension zeitlich unkorreliert ist. Die Lösungen (3.8) und (3.9) können auch auf mikroskopischer Basis durch Elementarprozesse (z. B. durch Zufallswanderung eines Teilchens, englisch *random walk*) erzeugt werden.

Aus der Fundamentallösung (3.8) gewinnt man noch zwei wichtige Aussagen:

1. Das mittlere Verschiebungsquadrat für ein Teilchen zur Zeit t ist durch

$$\langle \vec{r}^2(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{r}^2 P(\vec{r}, t) d^d r = 2dDt \quad (3.10)$$

für $d = 1, 2, 3$ gegeben, d. h., es gilt immer der funktionale Zusammenhang $\langle \vec{r}^2(t) \rangle \sim t$, unabhängig von der Dimension d .

2. Die Wahrscheinlichkeit, ein Teilchen zur Zeit t am Ort $\vec{0}$ anzutreffen, wird durch

$$P(\vec{0}, t) = \frac{1}{(\sqrt{4\pi Dt})^d} \sim t^{-d/2} \quad (3.11)$$

bestimmt. Diese Beziehung dient später zur Definition der Spektraldimension \bar{d} eines Fraktals.

Die Diffusion innerhalb eines Fraktals verläuft gebremst, weil ja die wandernden Teilchen die Lücken im Fraktal umgehen müssen. Entscheidend ist, daß diese sogenannte *anomale Diffusion* nicht durch einen verkleinerten Diffusionskoeffizienten D und durch die geometrische Dimension \bar{d} beschrieben wird; vielmehr tritt ein neuer funktionaler Zusammenhang zwischen $\langle \vec{r}^2(t) \rangle$ und t auf [8, 9]:

$$\langle \vec{r}^2(t) \rangle \sim t^\kappa. \quad (3.12)$$

Dabei hat der Diffusionsexponent κ folgende zwei Eigenschaften:

1. Es ist $\kappa < 1$, dadurch wird die Diffusion ein zeitlich korrelierter stochastischer Prozeß.
2. κ ist für jeden Fraktaltyp spezifisch und unabhängig von der geometrischen Dimension \bar{d} , es ist κ also keine universelle Größe.

Die anomale Diffusion kann durch eine komplizierte verallgemeinerte Diffusionsgleichung und eine entsprechende verallgemeinerte Fundamentallösung beschrieben werden, diese ist nicht länger eine GAUSSsche Wahrscheinlichkeitsdichte, s. [6, 8, 9]. Interessante theoretische Alternativen bietet auch

die Anwendung des sogenannten fraktionalen Kalküls, d. h. das Rechnen mit Differentialquotienten gebrochenzahliger Ordnung [6, 10, 11, 12, 13].

Da der Diffusionsexponent $\kappa < 1$ ist, wird die gebremste anomale Diffusion von einer zeitlichen Antikorrelation beherrscht, d. h., ein wanderndes Teilchen läuft sozusagen bevorzugt rückwärts. Dadurch hat die Größe $\langle \bar{r}^2(t) \rangle$ nicht länger stationäre Zuwächse, und der Anfangszeitpunkt wird bei Experimenten mit fraktalen Systemen wichtig. Das gilt insbesondere für Diffusionsexperimente mit der Kernspinresonanz-Echo-Spektroskopie [14, 15].

Es ist sinnvoll und üblich, eine Wanderungsdimension d_w durch die Beziehung

$$\kappa = \frac{2}{d_w} \quad (3.13)$$

einzuführen, wobei man noch $d_w = 2 + \theta$ setzt [8, 9]. Mit $d_w = 2$, $\theta = 0$ ergibt sich normale Diffusion; gebremste anomale Diffusion wird durch Werte $d_w > 2$ charakterisiert. Der Zahlenwert d_w ist in den meisten Fällen mit der geometrischen fraktalen Dimension \bar{d} der BROWNSchen Trajektorie (WIENER-Kurve) identisch, die sowohl bei normaler wie bei anomaler Diffusion ein typisches Fraktal ist, also Raumgebiete eines Zustandsraumes dicht füllt. Maximale Werte gehen bis $d_w = 6$. Für das einfachste SIERPIŃSKI-Dreieck wird $d_w = \ln 5 / \ln 2 > 2$.

Eine weitere wichtige Dimension für alle Prozeßabläufe ist die Spektraldimension \bar{d} . Sie wird, ausgehend von anomalen Diffusionsprozessen, im Anschluß an Gl. (3.11) durch die Beziehung

$$P(0, t) \sim t^{-\bar{d}/2} \quad (3.14)$$

definiert. Der Zusammenhang zwischen der Wanderungsdimension d_w und der Spektraldimension \bar{d} kann durch eine typische Methode der Fraktalphysik ermittelt werden, nämlich der *Skalierungsmethode*. Bei ihr wird das grundlegende Skalierungsverhalten der relevanten Größen in Form von Proportionalitäten ausgenutzt. Man definiert dazu zunächst

$$l = +\sqrt{\langle \bar{r}^2(t) \rangle} \sim t^{1/d_w} \quad (3.15)$$

(also $t \sim l^{d_w}$, vgl. Gl. (3.3)). Das Gesamtvolumen im Fraktal, das im Mittel von einem wandernden Teilchen bis zur Zeit t erreichbar ist, beträgt

$$V(t) \sim l^{\bar{d}} \sim t^{\bar{d}/d_w}. \quad (3.16)$$

Die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen zur Zeit t an irgendeinem Punkt, z. B. am Nullpunkt, zu finden, ist gegeben durch

$$P(0, t) \sim \frac{1}{V(t)} \sim t^{-\bar{d}/d_w}. \quad (3.17)$$

Der Vergleich mit Gl. (3.14) ergibt sofort $\frac{\tilde{d}}{2} = \frac{\bar{d}}{d_w}$ und damit die wichtige Beziehung

$$\kappa = \frac{2}{d_w} = \frac{\tilde{d}}{\bar{d}} < 1. \quad (3.18)$$

Von den drei Dimensionen \bar{d} , d_w und \tilde{d} sind also nur zwei unabhängig. Die Spektraldimension hat in vielen Fällen den ungefähren Wert $\tilde{d} \approx \frac{4}{3}$. Für gewöhnliche euklidische Systeme fallen natürlich wegen $d_w = 2$ die beiden Dimensionen \bar{d} und \tilde{d} zusammen und sind gleich der entsprechenden euklidischen (Einbettungs-)Dimension d .

Es ist interessant und zeigt die Konsistenz der Theorie, daß das Schwingungsverhalten eines mit Atomen besetzten fraktalen Netzwerkes (genauer: eines Prä-Fraktals) von der gleichen Spektraldimension \tilde{d} beherrscht wird wie das Diffusionsverhalten. Nach der DEBEYSchen Theorie gilt für die Schwingungszustandsdichte $\rho(\omega)$ der Atomschwingungen eines gewöhnlichen euklidischen Kristallgitters der Dimension d :

$$\rho(\omega) \sim \omega^{d-1}. \quad (3.19)$$

Für fraktale Netzwerke entsteht daraus [16, 17]

$$\rho(\omega) \sim \omega^{\tilde{d}-1}. \quad (3.20)$$

Insbesondere elektronische Zustandsdichten werden durch die Spektraldimension festgelegt, sofern nicht rein statische Probleme wie das COULOMB-Glas mit lokalisierten Elektronen auf einem fraktalen Gitter untersucht werden [18].

Eine grundlegende Aufgabenstellung betrifft die Berechnung der Wanderungsdimension d_w (oder der Spektraldimension \tilde{d}) für ein fraktales System. Dazu existieren mehrere Renormierungsmethoden, die entscheidend die Selbstähnlichkeit eines Fraktals ausnutzen und dadurch exakt durchführbar sind, im Unterschied zu Renormierungsmethoden für nicht fraktale gewöhnliche Systeme. Die *Renormierung* physikalischer Größen wie des Propagators $P(\vec{r}, t)$ läuft auf eine unendlich oft wiederholte Reskalierung der Längenskalen im Fraktal hinaus [5, 6, 7, 9, 19].

Eine effektive Methode, nämlich die dynamische Ortsraumrenormierung, beruht auf dem Propagator-Formalismus für stochastische Sprungprozesse in stetiger Zeit (englisch: *continous time random walk*, CTRW), verbunden mit einem eleganten Matrixformalismus zur Ermittlung der exakten Dynamik eines wandernden Teilchens [6, 19]. Diese Methode ist der Renormierung einer Master-Gleichung für den Propagator $P(\vec{r}, t)$ des CTRW äquivalent [5, 20].

Der Propagator-Formalismus kann durch Einbeziehung einer stochastischen Verteilung endlicher Flugzeiten des wandernden Teilchens erweitert werden [21] und führt dann auf eine verallgemeinerte nicht-MARKOVsche Master-Gleichung [22].

3.3 Elektronentransport: EINSTEIN-Relation für Fraktale

Das Gebiet des Elektronentransports in Fraktalen umfaßt eine ganze Reihe verschiedenartiger Problemkreise; dazu gehören unter anderem

- Zustandsdichte und elektronische Struktur (Lösung der SCHRÖDINGER-Gleichung)
- Stromleitung durch Sprungtransport (*hopping*)
- ANDERSON-Lokalisierung und Multifraktalität der Wellenfunktion
- Rauschen in Fraktalen
- fraktale Elektroden
- dielektrischer Durchbruch (mit fraktalen Mustern)
- Perkolationsphysik.

Hier soll die sogenannte EINSTEIN-Relation für Fraktale [9] besprochen werden, die dynamische Dimensionen für Diffusion und Elektronentransport miteinander verknüpft und ein weiteres typisches Beispiel für die Anwendung der Skalierungsmethodik darstellt; diese Relation ist ein Analogon der EINSTEIN-Relation zwischen Diffusionskoeffizient D und spezifischer elektrischer Leitfähigkeit σ für gewöhnliche euklidische Systeme.

Die bekannte EINSTEIN-Relation für D und σ lautet für Elektronen

$$\sigma = n \frac{e^2}{kT} D, \quad (3.21)$$

dabei ist n die Elektronenzahldichte, e die Elektronenladung (im Betrag), k die BOLTZMANN-Konstante und T die Temperatur. Führt man die Beweglichkeit μ eines Teilchens als Driftgeschwindigkeit v_d bezogen auf die Feldstärke E ein,

$$\mu = \frac{v_d}{E}, \quad (3.22)$$

dann ist $\sigma = en\mu$, und damit lautet die EINSTEIN-Relation

$$\mu = \frac{e}{kT} D. \quad (3.23)$$

Es konnte streng gezeigt werden, daß Relationen vom Typ (3.21) oder (3.23) auch für Fraktale gelten müssen [9]. Interessanter sind Zusammenhänge zwischen dynamischen Dimensionen, die das Skalierungsverhalten von Größen wie dem mittleren Verschiebungsquadrat eines Teilchens bei Diffusion und dem elektrischen Widerstand R eines Fraktals verknüpfen. Für ein Fraktal ist ja charakteristisch, daß etwa ein spezifischer elektrischer Widerstand im eigentlichen Sinne nicht definiert werden kann; infolge der Selbstähnlichkeit wird eine solche Größe längenabhängig.

Für ein Fraktal oder genauer einen Fraktalausschnitt mit der Längenabmessung L und dem elektrischen Widerstand R definieren wir nach der allgemeinen Regel (3.3) eine Widerstandsdimension (einen Widerstandsexponenten) ζ gemäß

$$R \sim L^\zeta \quad (3.24)$$

und eine spezifische Widerstandsdimension (einen spezifischen Widerstandsexponenten) z , auch kinetischer Exponent genannt, gemäß

$$\frac{1}{\sigma} = \rho \sim L^z. \quad (3.25)$$

Weiter kann man setzen

$$\langle \bar{r}^2(t) \rangle = L^2 \sim t^{2/d_w} \Rightarrow t \sim L^{d_w}. \quad (3.26)$$

Nun ist $\sigma \sim L^{-z}$, andererseits gilt nach (3.21) $\sigma \sim nD$. Die Teilchenzahldichte $n = N/V$, gemessen pro Volumeneinheit des euklidischen Einbettungsraumes, also mit $V \sim L^d$, und mit der Teilchenzahl im Fraktalausschnitt $N \sim L^{\bar{d}}$, skaliert gemäß

$$n \sim L^{\bar{d}-d}. \quad (3.27)$$

Die Skalierung von D ergibt sich (für große Zeiten) mit

$$\langle \bar{r}^2(t) \rangle = L^2 \sim Dt \ (\sim t^{2/d_w})$$

zu

$$D \sim \frac{L^2}{t}. \quad (3.28)$$

Aus $\sigma \sim nD$ folgt schließlich $L^{-z} \sim L^{\bar{d}-d} \frac{L^2}{t}$, also

$$t \sim L^{\bar{d}-d+z+2},$$

und mit (3.26) folgt endgültig

$$d_w = \bar{d} + z + 2 - d. \quad (3.29)$$

Aus $R \sim \rho \frac{L}{L^{d-1}} \sim L^\zeta$ folgt $\zeta = z + 2 - d$ oder

$$\zeta = d_w - \bar{d}. \quad (3.30)$$

Die Beziehungen (3.29) und (3.30) stellen Schreibweisen der sogenannten EINSTEIN-Relation für Fraktale dar. Sie gestatten z. B. die Berechnung des kinetischen Exponenten z aus d, \bar{d} und d_w und die Berechnung der Widerstandsdimension ζ aus \bar{d} und d_w , d. h. die Berechnung dynamischer Dimensionen für den Ladungstransport allein aus Dimensionen für die Diffusion (d_w) und die fraktale Struktur (\bar{d}). Andere Schreibweisen ergeben sich durch Einführung der Spektraldimension \bar{d} .

Zur Prüfung der Richtigkeit etwa der EINSTEIN-Relation (3.30) kann man wieder ein SIERPIŃSKI-Dreieck untersuchen und durch Skalierung die Widerstandsdimension ζ direkt – und zwar streng – berechnen, s. Abb. 3.4. Es sei

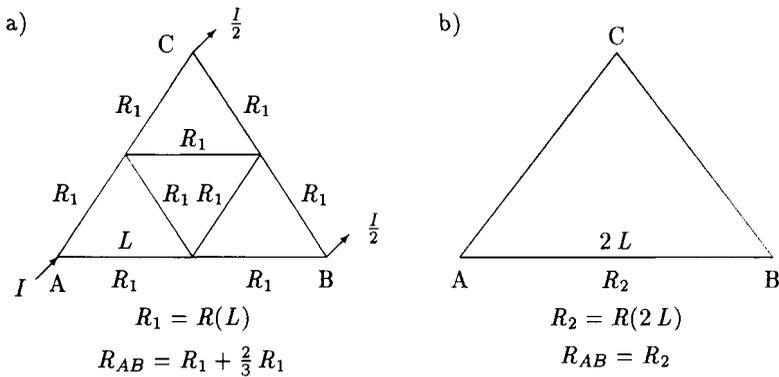


Abb. 3.4: Zur Reskalierung des Widerstandes R_{AB} in einem elektrischen Widerstandsnetzwerk in Form eines einfachen SIERPIŃSKI-Fraktals; I : Stromstärke.

$R_1 = R(L)$ der Widerstand eines Drahtstückes der Länge L , dann ist der Gesamtwiderstand gegenüber der Stromspeisung gemäß der Abb. 3.4a durch

$$R_{AB} = R_1 + \frac{2}{3} R_1 = \frac{5}{3} R_1$$

gegeben. Nach Reskalierung mittels Dezimierung (englisch: *decimation technique*) erhält man den vergrößerten Fraktalausschnitt von Abb. 3.4b, der neue Gesamtwiderstand entspricht dann $R_2 = R(2L)$, und es soll $R(2L) = \frac{5}{3}R(L)$ gelten, damit wird $R(2L) = 2^\zeta R(L)$ oder $\zeta \ln 2 = \ln \frac{5}{3}$ und schließlich

$$\zeta = \frac{\ln 5}{\ln 2} - \frac{\ln 3}{\ln 2} = 0,7369 \dots$$

Dies ist tatsächlich in Übereinstimmung mit der Beziehung $\zeta = d_w - \bar{d}$ für das einfache SIERPIŃSKI-Dreieck. Wegen der Selbstähnlichkeit des Fraktals genügt ein einziger Reskalierungsschritt oder Renormierungsschritt. Diese und weitere Beziehungen wurden für elektrische SIERPIŃSKI-Netzwerke experimentell bestätigt [23, 24].

Abschließend kann man folgende zwei Vorteile der Fraktalkonzeption für die Beschreibung zahlreicher Typen ungeordneter oder hierarchisch strukturierter Systeme nennen:

1. Komplizierte Systeme werden mit wenigen einfachen Kenngrößen, nämlich fraktalen Dimensionen, gut charakterisiert.
2. Die Selbstähnlichkeit von idealen Fraktalen als Modellsystemen gestattet die genaue Berechnung von Dimensionen und weiteren Kenngrößen durch die strenge (näherungsfreie) Durchführung von Renormierungsverfahren.

Die Autoren danken CH. ZYLKA sowie U. BERNERT, K. KOEPERNICK, S. RICHTER, H. STRAUSS und weiteren Mitgliedern der Arbeitsgruppe Statistische Physik fraktaler Systeme für interessante Diskussionen, ebenso J. KÄRGER, H. SPINDLER sowie A. VOJTA, M. VOJTA und T. VOJTA.

Literaturverzeichnis

- [1] Mandelbrot, B. B.: *The Fractal Geometry of Nature*. New York: Freeman, 1983. – Deutsche Übersetzung: Mandelbrot, B. B.: *Die fraktale Geometrie der Natur*. Berlin: Akademie-Verlag; Basel: Birkhäuser, 1987
- [2] Pfeifer, P.: *Chimia* 39 (1985), S. 120
- [3] Spindler, H.; Vojta, G.: *Z. Chemie* 28 (1988), S. 421
- [4] Schroeder, M.: *Fraktale, Chaos und Selbstähnlichkeit*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, 1994
- [5] Hilfer, R.: *Renormierungsansätze in der Theorie ungeordneter Systeme: Fraktale Modelle und ihre Anwendungen*. Thun; Frankfurt am Main: Verlag Harri Deutsch, 1986
- [6] Renner, U.: *Stochastische Theorie von Transportprozessen in ungeordneten und fraktalen Systemen*. Leipzig, Universität, Dissertation, 1993
- [7] Strauß, H.: *Transport auf regulär und stochastisch skaleninvarianten Strukturen*. Leipzig, Universität, Dissertation, 1993
- [8] Haus, J. W.; Kehr, K. W.: *Phys. Rep.* 150 (1987), S. 263
- [9] Havlin, S.; Ben-Avraham, D.: *Adv. Phys.* 36 (1987), S. 695
- [10] Schneider, W. R.; Wyss, W.: *J. Math. Phys.* 30 (1989), S. 134
- [11] Metzler, R.; Glöckle, W. G.; Nonnenmacher, T. F.: *Physica A* 211 (1994), S. 13
- [12] Roman, H. E.; Alemany, P. H.: *J. Phys. A* 27 (1994), S. 3407
- [13] Renner, U.; Vojta, G.: *Physica A* (in Vorbereitung)
- [14] Kärger, J.; Vojta, G.: *Chem. Phys. Lett.* 141 (1987), S. 411
- [15] Kärger, J.; Pfeifer, H.; Vojta, G.: *Phys. Rev. A* 37 (1988), S. 4514
- [16] Alexander, S.; Orbach, R.: *J. Phys. Lett. (Paris)* 43 (1982), L625
- [17] Malozemov, L.: *Commun. Math. Phys.* 156 (1993), S. 387
- [18] Vojta, A.; Vojta, G.; Vojta, M.; Vojta, T.: *J. Phys.: Cond. Matter* (eingereicht)
- [19] Renner, U.; Strauß, H.; Vojta, G.: *Physica A* (in Vorbereitung)
- [20] Hilfer, R.; Blumen, A.: *J. Phys. A* 17 (1984), L573, L784

- [21] Richter, S.: Leipzig, Universität, Diplomarbeit, 1991
- [22] Richter, S.; Vojta, G.: *Physica A* 188 (1992), S. 631
- [23] Ghez, J. M.; Wang, Y. Y.; Rammal, R.; Pannetier, B.; Bellissard, J.: *Solid State Commun.* 64 (1987), S. 1291
- [24] Gordon, J. M.; Goldman, A. M.: *Phys. Rev. B* 85 (1987), S. 4909